SUR LES

VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS ELLIPTIQUES

DES SEPT PLANÈTES PRINCIPALES :

MERCURE, VÉNUS, LA TERRE, MARS, JUPITER, SATURNE ET URANUS;

PAR M. LE VERRIER [*].

1. L'orbite d'une planète qui circulerait seule autour du Soleil serait une ellipse ayant l'un de ses foyers au centre d'attraction. Cette orbite aurait une forme, une position invariables; et elle serait complétement déterminée par son grand axe, son excentricité, la longitude du périhélie, l'inclinaison de son plan sur un plan de position donnée, et la longitude de son nœud.

La présence de plusieurs planètes autour du Soleil rend la détermination de leurs mouvements beaucoup moins simple. Elles agissent les unes sur les autres, proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse des carrés de leurs distances respectives; et par là elles sont sans cesse entraînées hors de l'ellipse qu'elles décriraient si elles n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil. On parvient toutefois à représenter facilement leur marche par les considérations suivantes. Admettons qu'à une époque donnée l'action perturbatrice des planètes vienne à cesser sur l'une d'elles; à l'instant elle se mettra en mouvement sur une ellipse dont les éléments différeront en général de ceux de l'ellipse primitive. Il

[*] Cet article ne doit être considéré que comme un extrait détaillé du Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences, en septembre 1839, et qui sera bientôt publié en entier dans la *Connaissance des Temps*.

est donc permis de considérer chacune des planètes comme se mouvant sur une ellipse de forme et de position variables. D'ailleurs, la petitesse des masses perturbatrices rend les variations séculaires des éléments elliptiques fort lentes et négligeables dans un intervalle de quelques années; de sorte qu'il suffit de connaître ces éléments, ainsi que la position correspondante de la planète dans son ellipse à une époque donnée, pour juger de toutes les circonstances du mouvement dans les environs de cette époque.

La détermination des éléments variables des orbites offre encore un intérêt tout particulier, en ce qu'elle seule peut nous permettre de juger si notre système planétaire réunit quelques conditions de stabilité. Malheureusement la question n'est susceptible de solution que par les méthodes d'approximation. On se fonde sur ce que les masses perturbatrices, les excentricités et les inclinaisons respectives des orbites étant fort petites, on peut développer les fonctions perturbatrices en séries ordonnées suivant les puissances et les produits de ces quantités. Ce développement étant admis, et en laissant de côté les *variations périodiques* qui ne font osciller les éléments qu'entre d'étroites limites, on reconnaît que les grands axes sont constants. La démonstration comprend les termes qui dans *la fonction perturbatrice* sont du premier et du second ordre, par rapport aux masses; et elle s'étend à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons. Mais comme elle repose sur le développement en série de la fonction perturbatrice, elle n'est concluante qu'autant qu'il demeure prouvé que les inclinaisons et les excentricités resteront toujours très petites. La détermination de ces éléments acquiert ainsi une double importance. Nous nous proposons de l'étudier ici, en commençant par les excentricités et les longitudes des périhélies qui sont liées étroitement.

Variations séculaires des excentricités et des longitudes des périhélies.

2. Désignons par e l'excentricité de Mercure, par ϖ la longitude de son périhélie, et posons

$$h = e \sin \varpi,$$

$$l = e \cos \varpi.$$

Lorsqu'on connaîtra h et l, on calculera e et ϖ par les formules

$$\left.\begin{aligned} e &= \sqrt{h^2+l^2}, \\ \operatorname{tang}\varpi &= \frac{h}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Désignons d'ailleurs pour Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, les mêmes quantités par les mêmes lettres affectées des indices $'$, $''$, $'''$, $^{\text{iv}}$, $^{\text{v}}$, $^{\text{vi}}$.

Les variations de h et l, h' et l',... en se bornant aux termes du premier degré par rapport aux excentricités, dépendront des équations linéaires suivantes

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \left[(0,1)+(0,2)+\ldots\right]l - \boxed{0,1}\; l' - \text{etc.}\ldots = 0,\\
\frac{dl}{dt} &= -\left[(0,1)+(0,2)+\ldots\right]h + \boxed{0,1}\; h' + \text{etc.}\ldots = 0,\\
\frac{dh'}{dt} &= \left[(1,0)+(1,2)+\ldots\right]l' - \boxed{1,0}\; l - \text{etc.}\ldots = 0,\\
\frac{dl'}{dt} &= -\left[(1,0)+(1,2)+\ldots\right]h' + \boxed{1,0}\; h + \text{etc.}\ldots = 0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

pour l'intelligence desquelles nous renverrons à la *Mécanique céleste*, livre II, § 55). Les coefficients $(0,1)$, $(0,2)$,... $\boxed{0,1}$, $\boxed{0,2}$ .... ne dépendent que des masses perturbatrices et des grands axes des orbites : ils sont liés deux à deux par des relations telles que les suivantes

$$\left.\begin{aligned}
m\sqrt{a}\,(0,1) &= m'\sqrt{a'}\,(1,0),\\
m\sqrt{a}\,\boxed{0,1} &= m'\sqrt{a'}\,\boxed{1,0},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

m, a, m', a', etc.,... désignant respectivement les masses et les grands axes de Mercure, Vénus, etc.

5. Pour intégrer ces équations, on pose

$$\begin{array}{ll} h = \mathrm{N}\sin(gt+\mathcal{E}), & l = \mathrm{N}\cos(gt+\mathcal{E}), \\ h' = \mathrm{N}'\sin(gt+\mathcal{E}), & l' = \mathrm{N}'\cos(gt+\mathcal{E}), \\ \text{etc.}, & \text{etc.}, \end{array}$$

et la substitution de ces expressions dans les équations différentielles conduit aux sept relations

$$\left.\begin{aligned}
&[g-(0,1)-(0,2)-(0,3)-(0,4)-(0,5)-(0,6)]\,\mathrm{N} + \boxed{0,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{0,2}\,\mathrm{N}'' + \boxed{0,3}\,\mathrm{N}''' \\
&\qquad + \boxed{0,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{0,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} + \boxed{0,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = 0, \\
&[g-(1,0)-(1,2)-(1,3)-(1,4)-(1,5)-(1,6)]\,\mathrm{N}' + \boxed{1,0}\,\mathrm{N} + \boxed{1,2}\,\mathrm{N}'' + \boxed{1,3}\,\mathrm{N}''' \\
&\qquad + \boxed{1,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{1,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} + \boxed{1,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = 0, \\
&[g-(2,0)-(2,1)-(2,3)-(2,4)-(2,5)-(2,6)]\,\mathrm{N}'' + \boxed{2,0}\,\mathrm{N} + \boxed{2,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{2,3}\,\mathrm{N}''' \\
&\qquad + \boxed{2,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{2,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} + \boxed{2,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = 0, \\
&[g-(3,0)-(3,1)-(3,2)-(3,4)-(3,5)-(3,6)]\,\mathrm{N}''' + \boxed{3,0}\,\mathrm{N} + \boxed{3,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{3,2}\,\mathrm{N}'' \\
&\qquad + \boxed{3,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{3,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} + \boxed{3,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = 0, \\
&[g-(4,0)-(4,1)-(4,2)-(4,3)-(4,5)-(4,6)]\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{4,0}\,\mathrm{N} + \boxed{4,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{4,2}\,\mathrm{N}'' \\
&\qquad + \boxed{4,3}\,\mathrm{N}''' + \boxed{4,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} + \boxed{4,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = 0, \\
&[g-(5,0)-(5,1)-(5,2)-(5,3)-(5,4)-(5,6)]\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} + \boxed{5,0}\,\mathrm{N} + \boxed{5,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{5,2}\,\mathrm{N}'' \\
&\qquad + \boxed{5,3}\,\mathrm{N}''' + \boxed{5,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{5,6}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = 0, \\
&[g-(6,0)-(6,1)-(6,2)-(6,3)-(6,4)-(6,5)]\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} + \boxed{6,0}\,\mathrm{N} + \boxed{6,1}\,\mathrm{N}' + \boxed{6,2}\,\mathrm{N}'' \\
&\qquad + \boxed{6,3}\,\mathrm{N}''' + \boxed{6,4}\,\mathrm{N}^{\mathrm{iv}} + \boxed{6,5}\,\mathrm{N}^{\mathrm{v}} = 0.
\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

Entre ces relations on élimine les rapports de six des coefficients N, N', N'',.. au septième, et il reste ainsi une équation en g qui est du septième degré. On en trouvera la démonstration au § 6, où nous donnerons

un moyen de former cette équation par les fonctions symétriques. Soient g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 et g_6 ses différentes racines. Pour chacune d'elles on obtiendra une solution différente du système des équations (4), et en réunissant ces solutions on aura des intégrales générales de la forme

$$\left.\begin{aligned}
h &= \mathrm{N}\sin(gt+\mathcal{C})+\mathrm{N}_1\sin(g_1t+\mathcal{C}_1)+\text{etc.},\\
l &= \mathrm{N}\cos(gt+\mathcal{C})+\mathrm{N}_1\cos(g_1t+\mathcal{C}_1)+\text{etc.},\\
h' &= \mathrm{N}'\sin(gt+\mathcal{C})+\mathrm{N}'_1\sin(g_1t+\mathcal{C}_1)+\text{etc.},\\
l' &= \mathrm{N}'\cos(gt+\mathcal{C})+\mathrm{N}'_1\cos(g_1t+\mathcal{C}_1)+\text{etc.},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

dans lesquelles il y aura encore quatorze arbitraires, savoir $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2,\ldots$ et N^{vi}, N_1^{vi}, $\mathrm{N}_2^{\text{vi}},\ldots$; en supposant que les rapports

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^{\text{vi}}},\ \frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}^{\text{vi}}},\ldots\ldots\ \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_1^{\text{vi}}},\ \frac{\mathrm{N}'_1}{\mathrm{N}_1^{\text{vi}}},\ldots\ldots$$

soient ceux qui ont été déterminés par les équations (4).

Ces arbitraires dépendront des valeurs des excentricités et des positions des périhélies à l'origine du temps ; et en dénotant ces valeurs par les mêmes lettres que ci-dessus, mais affectées d'un indice (0), et exprimant qu'elles satisfont aux intégrales générales, on obtiendra quatorze équations entre les quatorze arbitraires. On pourrait résoudre ces équations directement; mais les relations (3) qui existent entre les coefficients $\boxed{0,1}$ et $\boxed{1,0}$,... fournissent entre les différents systèmes de solutions les conditions suivantes

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{NN}_1 m\sqrt{a}+\mathrm{N}'\mathrm{N}'_1 m'\sqrt{a'}+\mathrm{N}''\mathrm{N}''_1 m''\sqrt{a''}+\ldots\ldots=0,\\
&\mathrm{NN}_2 m\sqrt{a}+\mathrm{N}'\mathrm{N}'_2 m'\sqrt{a'}+\mathrm{N}''\mathrm{N}''_2 m''\sqrt{a''}+\ldots\ldots=0,\\
&\text{etc.};
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

et ces conditions permettent d'éliminer d'une manière simple toutes les inconnues; N^{vi} et $\mathcal{C}$, par exemple. Posons, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}
&h_0 m\sqrt{a}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}} + h'_0 m'\sqrt{a'}\,\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}} + \ldots + h_0^{\mathrm{vi}} m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}} = n,\\
&l_0\, m\sqrt{a}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}} + l'_0 m'\sqrt{a'}\,\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}} + \ldots + l_0^{\mathrm{vi}} m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}} = d,\\
&m\sqrt{a}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}}\right)^2 + m'\sqrt{a'}\left(\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}}\right)^2 + \ldots + m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}} = \mathrm{D},
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

on obtient les deux équations

$$\left.\begin{aligned} n &= \mathrm{DN}^{\mathrm{vi}} \sin \mathcal{C},\\ d &= \mathrm{DN}^{\mathrm{vi}} \cos \mathcal{C}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

dont on déduit

$$\tang \mathcal{C} = \frac{n}{d}, \quad (8^*)$$

$$\mathrm{N}^{\mathrm{vi}} = \frac{\sqrt{n^2+d^2}}{\mathrm{D}} = \frac{n}{\mathrm{D}\sin \mathcal{C}}. \quad (9)$$

De ces deux expressions de N^{vi}, la seconde doit être seule conservée, quand on veut déterminer le signe qu'il faut attribuer à N^{vi}, suivant la valeur adoptée pour l'angle $\mathcal{C}$.

4. Les intégrales (5) peuvent donner à la rigueur toutes les circonstances des variations des éléments des orbites. Mais, ainsi que Lagrange l'a remarqué, elles sont d'une discussion très difficile. Nous allons chercher à établir directement les relations qui pourraient exister à une même époque entre les grandeurs des excentricités et les positions relatives des périhélies, et qui seraient indépendantes du plus ou moins grand éloignement de cette époque par rapport à nous.

Il existe sept intégrales de cette espèce, distinctes les unes des autres, et dont la relation connue entre les excentricités, les masses et les grands axes, n'est qu'une conséquence. On trouvera la démonstration de cette dernière relation

$$m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,e''^2 + \ldots\ldots = \text{constante}, \quad (10)$$

dans la *Mécanique céleste* (livre II, § 57). Nous allons développer ici les autres, en ne considérant que trois planètes pour plus de simplicité dans l'écriture.

Multiplions la première des équations (2) par $m\sqrt{a}\mathrm{N}$, la troisième par $m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'$, la cinquième par $m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''$; ajoutons membre à membre les équations résultantes, puis multiplions par

$$m\sqrt{a}\mathrm{N}h + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'h' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''h''$$

les deux membres de la relation ainsi obtenue. Nous formerons l'équation

$$\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}h + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'h' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''h''\right)\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}\frac{dh}{dt} + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'\frac{dh'}{dt} + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\frac{dh''}{dt}\right)$$

$$\sqrt{a}\mathrm{N}h + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'h' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''h'')\left\{\begin{aligned} & m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,b\,l - m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,1}\,l' - m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,2}\,l'' \\ & + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,b'l' - m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,0}\,l - m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,2}\,l'' \\ & + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''b''l'' - m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\,\boxed{2,0}\,l - m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\,\boxed{2,1}\,l', \end{aligned}\right\}$$

dans laquelle nous avons posé pour abréger,

$$\begin{aligned} (0,1) + (0,2) &= b, \\ (1,0) + (1,2) &= b', \\ (2,0) + (2,1) &= b''. \end{aligned}$$

En opérant d'une manière analogue sur la seconde, la quatrième et la sixième des équations (2), nous obtiendrons cette autre relation :

$$\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}l + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'l' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''l''\right)\left(m\sqrt{a}\mathrm{N}\frac{dl}{dt} + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'\frac{dl'}{dt} + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\frac{dl''}{dt}\right)$$

$$m\sqrt{a}\mathrm{N}l + m'\sqrt{a'}\mathrm{N}'l' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''l'')\left\{\begin{aligned} & -m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,b\,h + m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,1}\,h' + m\sqrt{a}\,\mathrm{N}\,\boxed{0,2}\,h'' \\ & -m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'b'\,h' + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,0}\,h + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'\,\boxed{1,2}\,h'' \\ & -m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''b''h'' + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\,\boxed{2,0}\,h + m''\sqrt{a''}\mathrm{N}''\,\boxed{2,1}\,h'. \end{aligned}\right\}$$

La somme des seconds membres de ces deux équations est nulle en vertu des rapports qui existent entre N, N' et N''. Pour le reconnaître, effectuons cette somme après avoir développé les calculs indiqués; supprimons les termes qui se détruisent identiquement, et en changeant convenablement les coefficients $\boxed{0,1}$, $\boxed{1,0}$ ... les uns dans les au-

tres, en vertu des relations (3), nous trouverons qu'elle peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}
&m\,m'\sqrt{a\,a'}\left[-N^2\,\boxed{1,0}+N'^2\,\boxed{0,1}+N\,N'(b'-b)-N\,N''\,\boxed{1,2}+N'\,N''\,\boxed{0,2}\right](h\,l'-h'\,l)\\
+\,&m\,m''\sqrt{aa''}\left[-N^2\,\boxed{2,0}+N''^2\,\boxed{0,2}+N\,N''(b''-b)-N\,N'\,\boxed{2,1}+N''N'\,\boxed{0,1}\right](h\,l''-h''\,l)\\
+\,&m'\,m''\sqrt{a'a''}\left[-N'^2\,\boxed{2,1}+N''^2\,\boxed{1,2}+N'N''(b''-b')-N'N\,\boxed{2,0}+N''N\,\boxed{1,0}\right](h'l''-h''l').
\end{aligned}$$

Or le coefficient de $(hl'-h'l)$ est nul en vertu de la relation qu'on obtient en éliminant g entre la première et la seconde des équations (4). Celui de $(hl''-h''l)$ et celui de $(h'l''-h''l')$ sont respectivement nuls en vertu des relations qu'on obtient en éliminant g entre la première et la troisième, ou entre la seconde et la troisième des mêmes équations. Ajoutons donc les deux premiers membres des équations (11) et (12), et nous trouverons l'équation différentielle

$$\left.\begin{aligned}
&(m\sqrt{a}\,Nh+m'\sqrt{a'}\,N'h'+m''\sqrt{a''}\,N''h'')\,(m\sqrt{a}\,Ndh+m'\sqrt{a'}\,N'dh'+m''\sqrt{a''}\,N''dh'')\\
+\,&(m\sqrt{a}\,Nl+m'\sqrt{a'}\,N'l'+m''\sqrt{a''}\,N''l'')\,(m\sqrt{a}\,Ndl+m'\sqrt{a'}\,N'dl'+m''\sqrt{a''}\,N''dl'')
\end{aligned}\right\}=0\,;$$

elle s'intègre immédiatement et donne la relation

$$(m\sqrt{a}\,Nh+m'\sqrt{a'}\,N'h'+m''\sqrt{a''}\,N''h'')^2+(m\sqrt{a}\,Nl+m'\sqrt{a'}\,N'l'+m''\sqrt{a''}\,N''l'')^2=\text{constante}, \quad (13)$$

qui ayant lieu pour chacun des systèmes de solutions $N, N', N'',\ldots$; $N_1, N_1', N_1'',\ldots$; $N_2, N_2', N_2'',\ldots$, fournit autant d'intégrales distinctes les unes des autres qu'il y a de ces systèmes. Il y en aura sept dans notre système planétaire.

L'intégrale (10) n'est pas distincte de celles que nous venons d'établir. Ces dernières ne dépendent, en effet, ainsi qu'on le voit en développant les carrés indiqués, que des positions relatives des périhélies; positions qui sont caractérisées par six angles seulement, les distances de six des périhélies au septième. On peut éliminer ces six angles entre les sept intégrales que nous considérons, et ainsi il reste entre les seules excentricités une intégrale qui n'est autre que l'intégrale (10).

On voit donc qu'il suffit d'attribuer aux positions relatives des périhélies un état déterminé pour qu'il soit possible de calculer immédiatement, par les sept équations analogues à l'équation (13), les valeurs de

toutes les excentricités, sans aucun égard de l'époque à laquelle ce phénomène peut arriver. La résolution de ces équations est d'une simplicité remarquable, quand on suppose que tous les périhélies coïncident. Nous y reviendrons plus tard.

5. Les conditions nécessaires pour la stabilité de notre système planétaire, relativement aux excentricités, sont de deux sortes : les unes ont rapport à la nature des racines de l'équation en g, les autres à la grandeur absolue des coefficients N, $N_1, \ldots$ N', $N'_1, \ldots$ etc.

Il est indispensable que les racines de l'équation en g soient toutes réelles et en outre inégales. Autrement les expressions des excentricités contiendraient des termes ayant le temps en facteur ou en exposant, et par là elles croîtraient indéfiniment. Or il est facile de prouver que cet accroissement indéfini des excentricités est impossible, en vertu des relations qui existent entre les coefficients des variables dans les équations différentielles. La relation (10) se déduit en effet immédiatement de ces équations, et elle ne saurait subsister si l'une des excentricités, quelle que fût d'ailleurs la grandeur de son coefficient, pouvait croître au-delà de toute limite. Nous sommes donc assurés que les sept racines de l'équation en g seront toutes réelles et différentes les unes des autres.

Le calcul seul des coefficients N, $N', \ldots$ peut nous apprendre si aucun d'entre eux ne sera considérable; et si par conséquent aucune des excentricités ne pourra grandir de manière à rendre insuffisantes les approximations sur lesquelles se fonde toutes cette analyse. L'équation (10), dans laquelle nous connaissons la valeur de la constante du second membre par les observations actuelles, nous montre bien qu'il est impossible que les excentricités des orbites des masses considérables puissent grandir au-delà de limites étroites; mais elle ne nous apprend rien sur les limites des excentricités des petites masses.

Le calcul numérique dont il s'agit a été donné par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1782, en partageant le système planétaire en deux autres, indépendants jusqu'à un certain point. En comparant les formules de cet illustre géomètre avec celles que nous obtiendrons dans la suite de ce travail, on reconnaîtra qu'elles ne donneraient pour Mercure, Vénus, la Terre et Mars que des résultats très inexacts, même après quelques siècles seulement, et plus tard complétement erronés; de sorte qu'il faut renoncer à leur emploi.

M. de Pontécoulant a repris ce travail dans le troisième volume de la *Théorie analytique du système du Monde*. Mais ses formules renferment toutes les erreurs les plus graves. Il sera inutile d'y revenir, si nous disons dès à présent qu'en y supposant le temps nul, on obtient des excentricités et des positions des périhélies qui n'ont pas *le plus léger rapport* avec celles que l'observation détermine [*].

On doit cependant désirer une solution de cette question. Nous l'avons entreprise, non pas seulement pour lui donner un plus grand degré d'exactitude, mais parce qu'elle n'existait réellement pas. Les

---

[*] Ce passage a été écrit en septembre 1839. Depuis cette époque, les formules dont il était question, ont disparu du troisième volume de la *Théorie analytique du Système du Monde*. Celles qu'on leur a substituées satisfont bien aux conditions relatives à l'origine du temps, mais elles ne sont guère plus exactes que les premières, sous d'autres rapports.

Ainsi que nous l'avons expliqué, on satisfait à l'état initial pour les excentricités, en déterminant quatorze constantes arbitraires au moyen de quatorze équations du premier degré partagées en deux groupes. La résolution numérique de ces équations peut s'effectuer directement; mais on peut l'éviter en pratiquant l'élimination algébriquement, au moyen des relations (6). En suivant cette dernière marche, les formules définitives ne reproduisent l'état initial que si tous les calculs relatifs à la détermination des arguments et des rapports des coefficients sont rigoureusement exacts; et il en résulte une vérification importante. Quand on résout directement les dernières équations, les formules définitives doivent au contraire satisfaire à l'état initial, lors même que tous les calculs qui précèdent seraient entièrement faux; et puisque c'est cette marche qui a été suivie dans la nouvelle solution, la vérification de l'état initial n'offre aucune garantie d'exactitude. Ce moyen de contrôle nous étant enlevé, ayons recours aux conditions (6), qui n'ont pas été employées directement dans les calculs, et voyons si elles sont satisfaites.

Prenons à cet effet (p. 391), pour les excentricités, par exemple, deux systèmes quelconques de solutions, savoir

$$\begin{aligned}
&M_4 = -0{,}0014274,\ M_4' = 0{,}0128082,\ M_4'' = -0{,}0128939,\ M_4''' = 0{,}0431786,\\
&\qquad M_4^{\text{iv}} = -0{,}0000000,\ M_4^{\text{v}} = 0{,}0000004,\ M_4^{\text{vi}} = -0{,}0000000;\\
&M_5 = -0{,}0037304,\ M_5' = 0{,}0105633,\ M_5'' = -0{,}0074366,\ M_5''' = -0{,}0622342,\\
&\qquad M_5^{\text{iv}} = 0{,}0000019,\ M_5^{\text{v}} = 0{,}0000128,\ M_5^{\text{vi}} = -0{,}0000008.
\end{aligned}$$

En les substituant dans la relation

$$M_4M_5\, m\sqrt{a} + M_4'M_5'\, m'\sqrt{a'} + M_4''M_5''\, m''\sqrt{a''} + \ldots\ \ldots = 0,$$

on devrait trouver la somme des nombres positifs égale à celle des nombres négatifs,

masses des planètes ne nous sont d'ailleurs connues que fort imparfaitement; et le problème étant traité sans aucune discussion à cet égard, il restait toujours à savoir quel degré de confiance on pouvait accorder aux résultats ainsi obtenus. Nous essaierons de résoudre cette seconde partie du problème avec une exactitude suffisante.

6. Occupons-nous d'abord de la détermination des arguments g, g_1, g_2,... détermination qui est la partie la plus délicate de la question. Ces arguments sont les différentes racines de l'équation en g qu'on obtiendrait par l'élimination des six rapports $\frac{N}{N^{VI}}, \frac{N'}{N^{VI}}, \ldots \frac{N^{V}}{N^{VI}}$ entre les sept équations (4). Le calcul de cette équation, déjà compliqué quand on ne considère pas plus de quatre planètes simultanément, devient impraticable par les moyens ordinaires de l'élimination quand on considère sept planètes; il s'introduit en effet des facteurs étrangers, dépendants de g, qui élèvent le degré de l'équation, et dont on ne peut se débarrasser qu'avec peine. Les fonctions symétriques donnent au contraire un moyen d'obtenir cette équation sans facteurs étrangers, ainsi que nous allons l'indiquer.

Écrivons, pour plus de simplicité, les équations (4) sous la forme suivante

$$\left.\begin{array}{l} (g - aN) + bN' + cN'' + \ldots\ldots = 0, \\ a'N + (g - b')N' + c'N'' + \ldots\ldots = 0, \\ a''N + b''N' + (g - c'')N'' + \ldots\ldots = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Si l'on voulait de ces équations tirer les valeurs des sept indéterminées

---

au moins *dans les premiers chiffres significatifs*. Or la première de ces sommes n'étant que de 57889, la seconde est égale à 123754. Les autres conditions, analogues à celles que nous venons d'examiner, ne sont pas plus satisfaites, soit pour les excentricités, soit pour les inclinaisons; et la nouvelle solution, bien que satisfaisant à quelques conditions particulières, n'en est pas moins fausse complètement.

Il était devenu indispensable d'entrer dans ces explications et de conserver ici quelques nombres de la nouvelle solution; car elle a été introduite dans le troisième volume de la *Théorie analytique du Système du Monde*, sans que rien puisse prévenir le lecteur qu'elle n'a pas paru en 1834, avec le reste du volume. Il se pourrait donc que la véritable solution y fût introduite à son tour de la même manière, et se trouvât ainsi antidatée de six ans; c'est ce qu'il fallait prévenir.

N, N′, N″, N‴, N$^{\text{IV}}$, N$^{\text{V}}$, N$^{\text{VI}}$, par les formules connues pour la résolution des équations du premier degré, on obtiendrait des résultats de la forme

$$\mathrm{DN} = 0, \quad \mathrm{DN}' = 0, \quad \text{etc.},$$

D étant le dénominateur commun à toutes les inconnues. Or on peut considérer ces résultats comme les équations finales provenant de l'élimination de toutes les indéterminées excepté une, et par là on voit que l'équation finale en g dont nous avons besoin, n'est autre que l'équation $\mathrm{D} = 0$, ou

$$\left.\begin{array}{l}(g-a)(g-b')(g-c'')\ldots\ldots - ba'(g-c'')\ldots\ldots\ldots + \text{etc.}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - c(g-b')a''\ldots\ldots\ldots + \text{etc.}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (g-a)c'b''\ldots\ldots\ldots + \text{etc.}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \text{etc.}\end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation sera du septième degré; car le produit

$$(g-a)(g-b')(g-c'')\ldots\ldots$$

donnera le terme g^7 qui ne pourra être détruit par aucun autre. Du même produit dépend en outre le coefficient du second terme de l'équation; car chacun des produits qui la composent renferme toutes les lettres a, b, c,... et tous les indices ^{0}, $'$, $''$,...; et d'après cette double condition, on voit qu'il ne peut contenir deux des coefficients compris dans une même colonne verticale, ou dans une même ligne horizontale des équations (14). Le produit $(g-a)(g-b')(g-c'')\ldots\ldots$ est donc le seul qui contienne non-seulement sept facteurs, mais même six facteurs en g, puisque l'existence de six facteurs en g dans un produit y entraîne nécessairement celle du septième. Développons ce produit, et nous trouverons que le coefficient du second terme de l'équation est égal à la somme

$$-(a + b' + c'' + \ldots\ldots),$$

c'est-à-dire que la somme des racines de l'équation est égale à la somme des coefficients qui affectent respectivement l, l', l'',.. dans les expressions de $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dh'}{dt}$, $\frac{dh''}{dt}$,.....

Différentions actuellement les équations (2); remplaçons dans les seconds membres $\frac{dl}{dt}, \frac{dl'}{dt}, \frac{dl''}{dt}, \ldots\ldots$ par leurs valeurs en fonction de h, h', h'', ... et supposons que nous obtenions ainsi les dérivées secondes

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 h}{dt^2} &= -A h + B h' + C h'' + \ldots\ldots, \\
\frac{d^2 h'}{dt^2} &= A' h - B' h' + C' h'' + \ldots\ldots, \\
\frac{d^2 h''}{dt^2} &= A'' h + B'' h' - C'' h'' + \ldots\ldots, \\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

les expressions générales de h, h', ... devront encore satisfaire à ces équations, et si on les y substitue, ainsi que leurs dérivées secondes, on retombera sur les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
(g^2 - A) N + B N' + C N'' + \ldots\ldots &= 0, \\
A' N + (g^2 - B') N' + C' N'' + \ldots\ldots &= 0, \\
A'' N + B'' N' + (g^2 - C'') N'' + \ldots\ldots &= 0, \\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ces conditions, qui peuvent remplacer les conditions (4), n'en diffèrent, sous le rapport de la forme, qu'en ce qu'elles contiennent le carré de la variable g au lieu de sa première puissance. Si donc on reprend les raisonnements précédents, on conclura facilement que la somme des carrés des racines est égale à la somme des coefficients qui affectent respectivement h, h', h'', ... dans les dérivées secondes, $\frac{d^2 h}{dt^2}$, $\frac{d^2 h'}{dt^2}$, $\frac{d^2 h''}{dt^2}$, ... cette somme étant prise en signe contraire.

Il n'est pas besoin de plus longues explications pour apercevoir qu'on obtiendra la somme des cubes, des quatrièmes puissances... des racines, au moyen des dérivées troisième, quatrième... de h, h'... Et d'ailleurs, quand on aura les sommes des puissances semblables des racines jusqu'à la septième, il sera facile de calculer les coefficients de l'équation par les fonctions symétriques.

Cette marche est assez simple, parce qu'on n'a besoin dans chaque dérivée que d'un seul de ses termes. Elle a en outre l'avantage précieux

de permettre de diriger les calculs de manière à obtenir les racines avec une approximation donnée. Les coefficients de l'équation n'ont pas besoin, pour cet objet, d'être tous calculés avec la même approximation; et on peut reconnaître que si l'on altère toutes les racines d'une équation d'une même petite quantité, la variation qui en résulte pour l'un des coefficients ne dépend que de la valeur des coefficients qui le précédent. Chaque coefficient n'étant calculé, par la marche indiquée, qu'après ceux qui sont avant lui dans l'équation cherchée, on peut donc savoir quel degré d'exactitude il est nécessaire de lui donner. Nous n'insistons pas à cet égard, parce que cette marche doit être un peu modifiée si l'on veut rendre exécutable la discussion de l'approximation sur laquelle on peut compter malgré les erreurs probables des masses adoptées.

7. Je me bornerai à donner une indication sommaire de la marche que j'ai réellement suivie pour arriver le plus rapidement possible, et avec toute l'exactitude désirable, à la détermination numérique des racines $g, g_1, \ldots$ et des coefficients $N, N' \ldots$ On pourra consulter la *Connaissance des Temps* (année 1843), pour les détails de la solution; je n'en consignerai ici que les résultats définitifs.

Reprenons les équations (4) et supposons qu'il s'agisse d'abord d'un des systèmes de valeurs correspondants aux racines qui proviennent de la présence des grosses planètes Jupiter, Saturne et Uranus. Pour en trouver une première approximation, nous pourrons n'employer que les trois dernières des équations (4), dans lesquelles nous négligerons les termes en N, N', N'' et N'''. Ces termes sont petits par rapport aux autres à cause de la faiblesse de leurs coefficients numériques, bien que les valeurs de N, N', N'' et N''' puissent être comparables à celles de N^{iv}, N^{v} et N^{vi}. La première approximation de trois des racines dépendra donc d'une équation du troisième degré qu'on pourra former d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de trouver une première approximation des racines introduites par la présence des petites planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars. On pourra n'employer que les quatre premières des équations (4) en y négligeant les termes en N^{iv}, N^{v} et N^{vi}; ces termes sont petits par rapport aux autres, non pas à cause de leurs coefficients numériques, mais bien parce que N^{iv}, N^{v}, N^{vi} ne

sont que de très petites fractions de N, N′, N″, N‴; cela se voit *à priori* en remarquant que l'action des trois petites planètes ne peut troubler que bien peu les trois grosses. La première approximation de quatre des racines dépendra donc d'une équation du quatrième degré.

Après avoir obtenu ainsi des valeurs déjà très approchées de toutes les racines, il faudra répéter pour chacune d'elles les calculs que je vais indiquer pour l'une de celles qui dépendent de l'équation du troisième degré, par exemple.

8. Au moyen de la première approximation de g et de deux des trois dernières équations (4) simplifiées comme nous l'avons expliqué, nous commencerons par déterminer des valeurs approchées des rapports $\frac{N^{iv}}{N^{vi}}$ et $\frac{N^{v}}{N^{vi}}$. Nous substituerons ensuite ces premières approximations de g, $\frac{N^{iv}}{N^{vi}}$ et $\frac{N^{v}}{N^{vi}}$, dans les quatre premières des équations (4), et nous en déduirons ainsi une première approximation des valeurs de $\frac{N}{N^{vi}}$, $\frac{N'}{N^{vi}}$, $\frac{N''}{N^{vi}}$ et $\frac{N'''}{N^{vi}}$. Reportant ces valeurs dans les trois dernières des équations (4), il deviendra nécessaire, pour y satisfaire, d'apporter des corrections à g, $\frac{N^{iv}}{N^{vi}}$ et $\frac{N^{v}}{N^{vi}}$. Ces corrections étant effectuées, on les emploiera pour corriger à leur tour les premières valeurs de $\frac{N}{N^{vi}}$, $\frac{N'}{N^{vi}}$, $\frac{N''}{N^{vi}}$, $\frac{N'''}{N^{vi}}$; et ainsi de suite. Après deux approximations, ou trois au plus, on aura les valeurs des inconnues avec toute l'exactitude nécessaire.

Mais pour la rapidité des calculs que nous indiquons ici, et surtout *pour que la détermination des erreurs des rapports en fonctions des erreurs des masses ne jette pas dans un dédale inextricable d'opérations*, il est indispensable de coordonner toutes ces déterminations, comme nous allons l'indiquer brièvement. La détermination des premières valeurs des coefficients et celle de leurs corrections dépendent d'équations du premier degré, lorsqu'on néglige les carrés des corrections, ce qui est permis dans chaque approximation, sauf à en tenir compte dans l'approximation suivante. Les différents systèmes d'équations que l'on obtient ainsi pour déterminer les corrections successives, présentent tous les mêmes coefficients des inconnues que le système primitif; ils n'en diffèrent que par les termes connus qui vont en dimi-

nuant rapidement de valeur absolue d'approximation en approximation. On voit qu'au lieu de résoudre tous ces systèmes d'équations séparément, il suffit de résoudre d'abord le système primitif en y représentant les termes connus par des indéterminées; on obtient ainsi des formules qui, sans aucune nouvelle résolution d'équations, donnent très rapidement les valeurs approchées des inconnues et leurs corrections successives en attribuant aux indéterminées des valeurs convenables.

Il faut encore remarquer que quand on passera au calcul des solutions correspondantes aux racines provenant des petites planètes, ce ne seront plus les rapports des coefficients au coefficient N^{VI} qui devront être calculés; ces rapports seraient infinis dans la première approximation. On pourra prendre leurs rapports avec le coefficient N'''.

9. Occupons-nous actuellement de la détermination des erreurs des racines et des coefficients en fonctions des erreurs des masses des planètes, erreurs que je désignerai, suivant l'usage, par μm, $\mu' m'$, $\mu'' m''$, $\mu''' m'''$, $\mu^{\text{IV}} m^{\text{IV}}$, $\mu^{\text{V}} m^{\text{V}}$ et $\mu^{\text{VI}} m^{\text{VI}}$.

Si les nombres μ, μ', μ''... étaient considérables, la détermination que nous avons en vue serait presque impraticable. Mais il est au contraire très vraisemblable que ces quantités ne sont que de petites fractions : qu'ainsi pour Jupiter μ^{IV} est au-dessous de 0,002; que pour Saturne μ^{V} ne dépasse pas 0,01; que pour Vénus, la Terre et Mars, μ', μ'' et μ''' ne dépassent pas 0,04. Les masses de Mercure et d'Uranus seules présentent une grande incertitude; et il ne serait pas impossible que μ s'élevât à $\frac{1}{3}$ et μ^{VI} à $\frac{1}{10}$, ou même plus. Mais comme l'influence de ces masses est beaucoup moindre que celle des autres, à cause de la petitesse de Mercure et de l'éloignement d'Uranus, il y aura encore peu d'inconvénients à traiter μ et μ^{VI} comme de petites quantités.

Cela étant, si l'on suppose ordonnées par rapport aux puissances de μ, μ', μ'',... les variations de chacun des nombres dont nous avons indiqué la détermination, on pourra les obtenir sous cette forme avec autant d'exactitude qu'on le voudra, en reprenant tous les calculs que nous avons tracés. Nous nous contenterons d'obtenir la partie de ces variations qui est proportionnelle aux premières puissances des erreurs des masses.

D'autre part, il résulte de nos calculs que les corrections dépendantes de la seconde approximation sont toujours des fractions très petites des valeurs absolues des nombres qu'elles concernent. Il est donc tout-à-fait suffisant de s'arrêter à la première approximation dans la détermination des variations produites par les erreurs des masses.

Commençons par calculer les variations des racines des équations du troisième et du quatrième degré; et prenons pour exemple celles de l'équation du troisième degré que j'écrirai ainsi

$$g^3 + a_1 g^2 + a_2 g + a_3 = 0.$$

On a entre les coefficients et les racines de cette équation, les relations suivantes

$$\begin{aligned} a_1 &= -g - g_1 - g_2, \\ a_2 &= gg_1 + gg_2 + g_1 g_2, \\ a_3 &= -gg_1 g_2; \end{aligned}$$

ces relations fournissent entre les variations des coefficients et les variations des racines, les trois conditions

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= -\delta g - \delta g_1 - \delta g_2, \\ \delta a_2 &= (g_1 + g_2)\delta g + (g + g_2)\delta g_1 + (g + g_1)\delta g_2, \\ \delta a_3 &= -g_1 g_2 \delta g - gg_2 \delta g_1 - gg_1 \delta g_2. \end{aligned}$$

Pour en déduire la variation δg, il suffit de multiplier ces relations respectivement par g^2, g^1, g^0, puis de les ajouter membre à membre; δg_1 et δg_2 disparaissent, et l'on trouve

$$\delta g = -\frac{g^2 \delta a_1 + g \delta a_2 + \delta a_3}{(g - g_1)(g - g_2)};$$

cette formule fera connaître les variations des racines quand on aura les variations des coefficients.

Or les coefficients résultent (§ 6) de simples multiplications arithmétiques entre des facteurs dépendant des masses. Introduisons dans ces facteurs les corrections qu'ils éprouveraient par l'effet des changements des masses, développons les produits en n'y conservant que les premières puissances des masses, et nous trouverons aisément les varia-

tions des coefficients. Elles se présenteront sous la forme

$$\begin{aligned}
\delta a_1 &= \varepsilon\mu + \varepsilon'\mu' + \varepsilon''\mu'' + \varepsilon'''\mu''' + \varepsilon^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}} + \varepsilon^{\text{V}}\mu^{\text{V}} + \varepsilon^{\text{VI}}\mu^{\text{VI}},\\
\delta a_2 &= \zeta\mu + \zeta'\mu' + \zeta''\mu'' + \zeta'''\mu''' + \zeta^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}} + \zeta^{\text{V}}\mu^{\text{V}} + \zeta^{\text{VI}}\mu^{\text{VI}},\\
\delta a_3 &= \eta\mu + \eta'\mu' + \eta''\mu'' + \eta'''\mu''' + \eta^{\text{IV}}\mu^{\text{IV}} + \eta^{\text{V}}\mu^{\text{V}} + \eta^{\text{VI}}\mu^{\text{VI}},
\end{aligned}$$

et elles donneront lieu à des vérifications importantes qui permettront de contrôler toute la suite du travail.

Les coefficients a_1, a_2, a_3 sont des fonctions homogènes du premier, du second et du troisième degré des quantités $(4,5)$, $(4,6)$..... Ces quantités étant proportionnelles aux masses, si toutes les masses viennent à augmenter dans le rapport de 1 à $1+\gamma$, a_1 augmentera aussi dans le même rapport; a_2 et a_3, en vertu des parties conservées de δa_2 et δa_3, augmenteront respectivement dans les rapports de 1 à $1+2\gamma$ et $1+3\gamma$. La somme algébrique des coefficients de μ, μ', μ'',..... dans δa_1 doit donc être égale à a_1; la somme algébrique des coefficients dans δa_2 doit être double de a_2; et celle des coefficients dans δa_3 doit être triple de a_3. On a ainsi les relations de conditions

$$\begin{aligned}
\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \varepsilon^{\text{IV}} + \varepsilon^{\text{V}} + \varepsilon^{\text{VI}} &= a_1,\\
\zeta + \zeta' + \zeta'' + \zeta''' + \zeta^{\text{IV}} + \zeta^{\text{V}} + \zeta^{\text{VI}} &= 2a_2,\\
\eta + \eta' + \eta'' + \eta''' + \eta^{\text{IV}} + \eta^{\text{V}} + \eta^{\text{VI}} &= 3a_3.
\end{aligned}$$

Reprenons les équations (4). Si toutes les masses des planètes augmentent dans le même rapport, il en sera de même des coefficients numériques contenus dans ces équations; et par conséquent, pourvu que g augmente aussi dans le même rapport, ce qui a effectivement lieu, il n'y aura rien à changer aux rapports $\frac{\text{N}}{\text{N}^{\text{VI}}}$, $\frac{\text{N}'}{\text{N}^{\text{VI}}}$, etc.; et de là résultent ces deux vérifications :

La somme algébrique des coefficients de μ, μ',... dans la variation d'une racine doit être égale à la racine même.

La somme algébrique des coefficients de μ, μ',... dans la variation d'un des rapports $\frac{\text{N}}{\text{N}^{\text{VI}}}$, $\frac{\text{N}'}{\text{N}^{\text{VI}}}$,... doit être nulle.

Quant aux variations des rapports $\frac{\text{N}}{\text{N}^{\text{VI}}}$, $\frac{\text{N}'}{\text{N}^{\text{VI}}}$,.... il suffira, pour les

déterminer, de recourir aux formules qui auront servi au calcul des rapports eux-mêmes, comme nous l'avons indiqué au § 8. Il n'y aura qu'à attribuer pour valeurs aux indéterminées introduites dans ces formules, les variations qu'elles éprouveront et par la variation des racines et par la variation des coefficients mêmes des équations.

Il nous resterait enfin à dire comment étant connues les variations des rapports des coefficients, on en déduira celles de l'angle $\mathfrak{C}$ et des coefficients eux-mêmes. Mais nous ne nous y arrêterons pas, et le lecteur y suppléera aisément. Il est toutefois essentiel de remarquer que *dans toutes ces variations, la somme algébrique des coefficients de* μ, μ', μ'',... *doit être nulle.*

10. Donnons d'abord les éléments de notre système planétaire, tels que l'observation les fournit pour une origine du temps fixée au 1[er] janvier 1800 :

	MASSES.	EXCENTRICITÉS.	LONGITUDES des périhélies.	INCLINAISONS.	LONGITUDES des nœuds ascend.
MERCURE	$\frac{1}{[illegible]}$	0,205 616	74°20′ 6″	7° 0′ 5″,9	45°57′ 9″
VÉNUS...............	$\frac{1}{401\ [illegible]}$	0,006 862	128 43 6	3 23 28,5	74 51 41
LA TERRE...........	$\frac{1}{[illegible]}$	0,016 792	99 30 29	0 0 0,0	0 0 0
MARS................	$\frac{1}{2\ 680\ 337}$	0,093 217	332 22 51	1 51 6,2	47 59 38
JUPITER.............	$\frac{1}{[illegible]}$	0,048 162	11 7 38	1 18 51,6	98 25 45
SATURNE.............	$\frac{1}{3512}$	0,056 150	89 8 20	2 29 35,9	111 56 7
URANUS..............	$\frac{1}{17918}$	0,046 611	167 30 24	0 46 28,0	72 59 21

Nous n'avons pas rapporté les grands axes que nous avons admis, parce qu'ils sont les mêmes que ceux qu'on trouve au § 22 du livre VI de la *Mécanique céleste,* pour le calcul des perturbations.

De la connaissance des masses et des grands axes dépend, ainsi que nous l'avons déjà dit, celle des coefficients (0,1), (1,0)... Il conviendrait sans doute de présenter ici les valeurs de ces coefficients, puisqu'ils servent de base à tous les calculs; pour abréger nous renverrons encore à la *Mécanique céleste,* livre VI, § 24, où on les trouvera calculés pour des masses un peu différentes de celles que nous venons d'adopter,

et exprimés en secondes décimales. On les réduira facilement aux nouvelles masses, auxquelles ils doivent être proportionnels; et on les ramènera à la division sexagésimale que nous avons suivie.

11. Les tableaux suivants comprennent les sept systèmes de solutions qui concernent les variations séculaires des excentricités et des longitudes des périhélies. Nous nous sommes bornés à y inscrire les coefficients eux-mêmes, et nous avons supprimé les valeurs de leurs rapports qui auraient doublé la longueur des tableaux sans nécessité. En regard de chaque nombre nous avons placé l'expression de sa variation en fonction des variations des masses; les variations des angles sont exprimées en secondes sexagésimales.

Désignat. des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ',... DES MASSES.
		Premier Système.
g	2'',258 42	$0'',0002\,\mu' + 0'',0004\,\mu'' + 0'',0001\,\mu''' + 0'',9452\,\mu^{iv} + 1'',3695\,\mu^{v} - 0'',0569\,\mu^{vi}$
$\mathfrak{C}$	126°43'15''	$-18''\mu + 425''\mu' + 844''\mu'' + 257''\mu''' - 83\,541''\mu^{iv} + 51\,145''\mu^{v} + 30\,888''\mu^{vi}$
N	0,000 440	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,16\,\mu' - 0{,}000\,09\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,30\,\mu^{iv} + 0{,}000\,21\,\mu^{v} + 0{,}000\,35\,\mu^{vi}$
N'	0,000 484	$-0{,}000\,02\,\mu - 0{,}000\,05\,\mu' - 0{,}000\,05\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,34\,\mu^{iv} + 0{,}000\,07\,\mu^{v} + 0{,}000\,39\,\mu^{vi}$
N''	0,000 526	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,08\,\mu' - 0{,}000\,02\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,35\,\mu^{iv} + 0{,}000\,04\,\mu^{v} + 0{,}000\,42\,\mu^{vi}$
N'''	0,000 743	$0{,}000\,00\,\mu - 0{,}000\,02\,\mu' - 0{,}000\,05\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,48\,\mu^{iv} - 0{,}000\,05\,\mu^{v} + 0{,}000\,60\,\mu^{vi}$
N^iv	0,001 932	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' - 0{,}000\,01\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}001\,26\,\mu^{iv} - 0{,}000\,31\,\mu^{v} + 0{,}001\,68\,\mu^{vi}$
N^v	0,001 863	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' - 0{,}000\,01\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}001\,65\,\mu^{iv} + 0{,}000\,11\,\mu^{v} + 0{,}001\,55\,\mu^{vi}$
N^vi	0,032 030	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,01\,\mu' + 0{,}000\,02\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}012\,41\,\mu^{iv} + 0{,}012\,\mu\,86^{v} - 0{,}000\,50\,\mu^{vi}$
		Deuxième Système.
g_1	3'',713 64	$0'',0002\,\mu + 0'',0032\,\mu' + 0'',0072\,\mu'' + 0'',0024\,\mu''' + 0'',6598\,\mu^{iv} + 2'',8283\,\mu^{v} + 0'',2137\,\mu^{vi}$
$\mathfrak{C}_1$	27°21'26''	$75''\mu + 28''\mu' + 107''\mu'' + 2''\mu''' - 61\,450''\mu^{iv} + 69\,581''\mu^{v} - 8343''\mu^{vi}$
N_1	0,025 203	$-0{,}000\,14\,\mu - 0{,}027\,38\,\mu' - 0{,}013\,77\,\mu'' - 0{,}000\,50\,\mu''' - 0{,}020\,51\,\mu^{iv} + 0{,}057\,25\,\mu^{v} + 0{,}005\,05\,\mu^{vi}$
N_1'	0,016 789	$-0{,}000\,11\,\mu - 0{,}003\,16\,\mu' - 0{,}004\,55\,\mu'' - 0{,}000\,18\,\mu''' - 0{,}009\,05\,\mu^{iv} + 0{,}015\,43\,\mu^{v} + 0{,}001\,62\,\mu^{vi}$
N_1''	0,016 611	$-0{,}000\,10\,\mu - 0{,}003\,11\,\mu' - 0{,}002\,20\,\mu'' - 0{,}000\,14\,\mu''' - 0{,}007\,34\,\mu^{iv} + 0{,}011\,57\,\mu^{v} + 0{,}001\,32\,\mu^{vi}$
N_1'''	0,019 139	$-0{,}000\,03\,\mu - 0{,}000\,70\,\mu' - 0{,}001\,13\,\mu'' - 0{,}000\,01\,\mu''' - 0{,}002\,33\,\mu^{iv} + 0{,}003\,45\,\mu^{v} + 0{,}000\,75\,\mu^{vi}$
N_1^{iv}	0,044 021	$0{,}000\,01\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' + 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}002\,83\,\mu^{iv} - 0{,}003\,65\,\mu^{v} + 0{,}000\,81\,\mu^{vi}$
N_1^{v}	0,034 725	$0{,}000\,01\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' + 0{,}000\,02\,\mu'' + 0{,}000\,01\,\mu''' - 0{,}003\,71\,\mu^{iv} + 0{,}003\,84\,\mu^{v} - 0{,}000\,17\,\mu^{vi}$
N_1^{vi}	− 0,030 861	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,11\,\mu' + 0{,}000\,18\,\mu'' + 0{,}000\,06\,\mu''' - 0{,}014\,96\,\mu^{iv} + 0{,}009\,98\,\mu^{v} + 0{,}004\,62\,\mu^{vi}$

Désignat. des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ', . . DES MASSES.
		Troisième Système.
g_2	$22'',427\,3$	$0'',001\,2\,\mu' + 0'',002\,7\,\mu'' + 0'',000\,9\,\mu''' + 17'',526\,6\,\mu^{\text{iv}} + 4'',560\,5\,\mu^{\text{v}} + 0'',335\,0\,\mu^{\text{vi}}$
C_2	$126^\circ 44' 8''$	$22''\mu' + 41''\mu'' - 4''\mu''' - 19\,470''\mu^{\text{iv}} + 22\,281''\mu^{\text{v}} - 2\,869''\mu^{\text{vi}}$
N_2	$0,000\;100$	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,13\,\mu' + 0,000\,12\,\mu'' + 0,000\,01\,\mu''' - 0,000\,27\,\mu^{\text{iv}} + 0,000\,01\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N'_2	$-\,0,000\;378$	$-0,000\,04\,\mu - 0,001\,04\,\mu' - 0,001\,70\,\mu'' - 0,000\,17\,\mu''' + 0,002\,41\,\mu^{\text{iv}} + 0,000\,47\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,07\,\mu^{\text{vi}}$
N''_2	$0,002\;366$	$0,000\,04\,\mu + 0,001\,92\,\mu' + 0,000\,28\,\mu'' + 0,000\,15\,\mu''' - 0,003\,42\,\mu^{\text{iv}} + 0,001\,16\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,14\,\mu^{\text{vi}}$
N'''_2	$0,015\;170$	$0,000\,05\,\mu + 0,001\,00\,\mu' + 0,005\,04\,\mu'' - 0,000\,03\,\mu''' - 0,007\,47\,\mu^{\text{iv}} + 0,002\,72\,\mu^{\text{v}} - 0,001\,30\,\mu^{\text{vi}}$
N^{iv}_2	$-\,0,015\;561$	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' + 0,014\,63\,\mu^{\text{iv}} - 0,014\,93\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,30\,\mu^{\text{vi}}$
N^{v}_2	$0,048\;282$	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' - 0,000\,01\,\mu''' + 0,011\,24\,\mu^{\text{iv}} - 0,011\,03\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,19\,\mu^{\text{vi}}$
N^{vi}_2	$-\,0,001\;764$	$0,000\,00\,\mu + 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,00\,\mu'' + 0,000\,00\,\mu''' + 0,001\,00\,\mu^{\text{iv}} - 0,001\,04\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,03\,\mu^{\text{vi}}$
		Quatrième Système.
g_3	$5'',298\,9$	$-\,0'',163\,5\,\mu + 2'',435\,1\,\mu' + 0'',976\,4\,\mu'' + 0'',038\,2\,\mu''' + 1'',920\,0\,\mu^{\text{iv}} + 0'',090\,7\,\mu^{\text{v}} + 0'',01\,9\,\mu^{\text{vi}}$
C_3	$85^\circ 47' 45''$	$-\,5430''\mu + 16\,075''\mu' - 17\,722''\mu'' - 3039''\mu''' - 53\,444''\mu^{\text{iv}} + 56\,889''\mu^{\text{v}} + 6671''\mu^{\text{vi}}$
N_3	$0,170\;999$	$-0,007\,83\,\mu - 0,041\,63\,\mu' + 0,021\,17\,\mu'' + 0,001\,35\,\mu''' + 0,074\,19\,\mu^{\text{iv}} - 0,045\,03\,\mu^{\text{v}} - 0,002\,22\,\mu^{\text{vi}}$
N'_3	$0,016\;886$	$0,012\,28\,\mu + 0,018\,29\,\mu' - 0,007\,21\,\mu'' - 0,000\,71\,\mu''' - 0,016\,83\,\mu^{\text{iv}} - 0,005\,58\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,24\,\mu^{\text{vi}}$
N''_3	$0,010\;622$	$0,007\,60\,\mu + 0,015\,75\,\mu' - 0,002\,55\,\mu'' - 0,000\,70\,\mu''' - 0,016\,18\,\mu^{\text{iv}} - 0,003\,76\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,16\,\mu^{\text{vi}}$
N'''_3	$0,001\;655$	$0,001\,18\,\mu + 0,002\,79\,\mu' + 0,000\,65\,\mu'' - 0,000\,07\,\mu''' - 0,003\,91\,\mu^{\text{iv}} - 0,000\,62\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,02\,\mu^{\text{vi}}$
N^{iv}_3	$-\,0,000\;020$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N^{v}_3	$-\,0,000\;018$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N^{vi}_3	$0,000\;007$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
		Cinquième Système.
g_4	$7'',574\,7$	$0'',445\,3\,\mu + 0'',298\,2\,\mu' + 1'',244\,9\,\mu'' + 0'',157\,7\,\mu''' + 5'',178\,9\,\mu^{\text{iv}} - 0'',242\,9\,\mu^{\text{v}} + 0'',006\,2\,\mu^{\text{vi}}$
C_4	$35^\circ 38' 43''$	$71\,569''\mu + 162\,953''\mu' - 70\,077''\mu'' + 6\,810''\mu''' - 202\,460''\mu^{\text{iv}} + 34\,880''\mu^{\text{v}} - 3\,675''\mu^{\text{vi}}$
N_4	$0,025\;468$	$0,001\,88\,\mu + 0,064\,55\,\mu' - 0,011\,63\,\mu'' - 0,002\,33\,\mu''' - 0,061\,72\,\mu^{\text{iv}} + 0,008\,25\,\mu^{\text{v}} + 0,001\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N'_4	$-\,0,023\;826$	$-0,006\,61\,\mu - 0,009\,25\,\mu' + 0,011\,31\,\mu'' + 0,000\,68\,\mu''' + 0,014\,12\,\mu^{\text{iv}} - 0,009\,31\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,94\,\mu^{\text{vi}}$
N''_4	$-\,0,018\;925$	$-0,006\,29\,\mu - 0,008\,83\,\mu' + 0,004\,45\,\mu'' + 0,000\,89\,\mu''' + 0,017\,63\,\mu^{\text{iv}} - 0,007\,12\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,74\,\mu^{\text{vi}}$
N'''_4	$-\,0,003\;259$	$-0,001\,20\,\mu - 0,002\,08\,\mu' - 0,001\,55\,\mu'' + 0,000\,08\,\mu''' + 0,006\,08\,\mu^{\text{iv}} - 0,001\,20\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,13\,\mu^{\text{vi}}$
N^{iv}_4	$0,000\;012$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N^{v}_4	$0,000\;013$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N^{vi}_4	$-\,0,000\;003$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$

Designat. des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ',... DES MASSES.
		Sixième Système.
g_5	$17'',152\,7$	$0'',191\,5\,\mu + 3'',611\,3\,\mu' + 4'',204\,5\,\mu'' - 0'',022\,4\,\mu''' + 8'',773\,3\,\mu^{\text{iv}} + 0'',386\,4\,\mu^{\text{v}} + 0'',007\,9\,\mu^{\text{vi}}$
ϵ_5	$-25^\circ\,11'\,33''$	$-4572''\mu - 466\,253''\mu' - 351\,864''\mu'' - 64\,874''\mu''' + 871\,825''\mu^{\text{iv}} + 14\,000''\mu^{\text{v}} + 1738''\mu^{\text{vi}}$
N_5	$0,001\,640$	$0,000\,29\,\mu + 0,006\,07\,\mu' + 0,004\,87\,\mu'' + 0,001\,22\,\mu''' - 0,012\,11\,\mu^{\text{iv}} - 0,000\,30\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,05\,\mu^{\text{vi}}$
N_5'	$-0,013\,010$	$-0,002\,68\,\mu - 0,040\,44\,\mu' - 0,045\,03\,\mu'' - 0,010\,88\,\mu''' + 0,096\,69\,\mu^{\text{iv}} + 0,001\,87\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,46\,\mu^{\text{vi}}$
N_5''	$0,011\,782$	$0,001\,62\,\mu + 0,042\,57\,\mu' + 0,020\,49\,\mu'' + 0,009\,24\,\mu''' - 0,072\,42\,\mu^{\text{iv}} - 0,001\,09\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,40\,\mu^{\text{vi}}$
N_5'''	$0,029\,214$	$0,015\,81\,\mu + 0,327\,74\,\mu' + 0,247\,24\,\mu'' + 0,024\,41\,\mu''' - 0,595\,21\,\mu^{\text{iv}} - 0,018\,48\,\mu^{\text{v}} - 0,001\,50\,\mu^{\text{vi}}$
N_5^{iv}	$-0,000\,001$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N_5^{v}	$-0,000\,008$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N_5^{vi}	$0,000\,000$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
		Septième Système.
g_6	$17'',863\,3$	$0'',098\,0\,\mu + 2'',208\,7\,\mu' + 3'',143\,1\,\mu'' + 0'',254\,8\,\mu''' + 11'',634\,7\,\mu^{\text{iv}} + 0'',510\,8\,\mu^{\text{v}} + 0'',012\,9\,\mu^{\text{vi}}$
ϵ_6	$-45^\circ\,28'\,59''$	$-12773''\mu - 145\,102''\mu' - 109\,467''\mu'' + 2432''\mu''' + 256\,011''\mu^{\text{iv}} + 9\,110''\mu^{\text{v}} - 211''\mu^{\text{vi}}$
N_6	$-0,001\,795$	$-0,000\,42\,\mu - 0,007\,82\,\mu' - 0,006\,11\,\mu'' - 0,000\,96\,\mu''' + 0,014\,67\,\mu^{\text{iv}} + 0,000\,61\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,02\,\mu^{\text{vi}}$
N_6'	$0,015\,340$	$0,003\,21\,\mu + 0,042\,39\,\mu' + 0,048\,21\,\mu'' + 0,009\,36\,\mu''' - 0,099\,47\,\mu^{\text{iv}} - 0,003\,46\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,24\,\mu^{\text{vi}}$
N_6''	$-0,016\,913$	$-0,002\,15\,\mu - 0,047\,09\,\mu' - 0,020\,44\,\mu'' - 0,010\,82\,\mu''' + 0,077\,80\,\mu^{\text{iv}} + 0,002\,45\,\mu^{\text{v}} + 0,000\,24\,\mu^{\text{vi}}$
N_6'''	$0,073\,049$	$-0,014\,83\,\mu - 0,318\,37\,\mu' - 0,236\,10\,\mu'' - 0,021\,08\,\mu''' + 0,563\,40\,\mu^{\text{iv}} + 0,027\,34\,\mu^{\text{v}} - 0,000\,36\,\mu^{\text{vi}}$
N_6^{iv}	$-0,000\,001$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N_6^{v}	$-0,000\,010$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
N_6^{vi}	$0,000\,001$	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' \quad 0,000\,00\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{iv}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{v}} \quad 0,000\,00\,\mu^{\text{vi}}$

12. Rapprochons enfin les différents résultats relatifs à chaque planète, afin d'obtenir les formules particulières à chacune d'elles. Si nous posons, pour simplifier,

$$
\begin{aligned}
G &= 2'',258\,42\,t + 126^\circ\,43'\,15'',\\
G_1 &= 3,713\,64\,t + 27.21.26,\\
G_2 &= 22,427\,3\,t + 126.44.\ 8,\\
G_3 &= 5,298\,9\,t + 85.47.45,\\
G_4 &= 7,574\,7\,t + 35.38.43,\\
G_5 &= 17,152\,7\,t - 25.11.33,\\
G_6 &= 17,863\,3\,t - 45.28.59,
\end{aligned}
$$

les valeurs de h, l, h', l',... seront données par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
h &= 0{,}000\,440 \sin G + 0{,}025\,203 \sin G_1 + 0{,}000\,100 \sin G_2 + 0{,}170\,999 \sin G_3 \\
&\quad + 0{,}025\,468 \sin G_4 + 0{,}001\,640 \sin G_5 - 0{,}001\,795 \sin G_6, \\
l &= 0{,}000\,440 \cos G + 0{,}025\,203 \cos G_1 + 0{,}000\,100 \cos G_2 + 0{,}170\,999 \cos G_3 \\
&\quad + 0{,}025\,468 \cos G_4 + 0{,}001\,640 \cos G_5 - 0{,}001\,795 \cos G_6;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
h' &= 0{,}000\,484 \sin G + 0{,}016\,789 \sin G_1 - 0{,}000\,378 \sin G_2 + 0{,}016\,886 \sin G_3 \\
&\quad - 0{,}023\,826 \sin G_4 - 0{,}013\,010 \sin G_5 + 0{,}015\,340 \sin G_6, \\
l' &= 0{,}000\,484 \cos G + 0{,}016\,789 \cos G_1 - 0{,}000\,378 \cos G_2 + 0{,}016\,886 \cos G_3 \\
&\quad - 0{,}023\,826 \cos G_4 - 0{,}013\,010 \cos G_5 + 0{,}015\,340 \cos G_6;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
h'' &= 0{,}000\,526 \sin G + 0{,}016\,611 \sin G_1 + 0{,}002\,366 \sin G_2 + 0{,}010\,622 \sin G_3 \\
&\quad - 0{,}018\,925 \sin G_4 + 0{,}011\,782 \sin G_5 - 0{,}016\,913 \sin G_6, \\
l'' &= 0{,}000\,526 \cos G + 0{,}016\,611 \cos G_1 + 0{,}002\,366 \cos G_2 + 0{,}010\,622 \cos G_3 \\
&\quad - 0{,}018\,925 \cos G_4 + 0{,}011\,782 \cos G_5 - 0{,}016\,913 \cos G_6;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
h''' &= 0{,}000\,743 \sin G + 0{,}019\,139 \sin G_1 + 0{,}015\,170 \sin G_2 + 0{,}001\,655 \sin G_3 \\
&\quad - 0{,}003\,259 \sin G_4 + 0{,}029\,214 \sin G_5 + 0{,}073\,049 \sin G_6, \\
l''' &= 0{,}000\,743 \cos G + 0{,}019\,139 \cos G_1 + 0{,}015\,170 \cos G_2 + 0{,}001\,655 \cos G_3 \\
&\quad - 0{,}003\,259 \cos G_4 + 0{,}029\,214 \cos G_5 + 0{,}073\,049 \cos G_6;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
h^{\text{IV}} &= 0{,}001\,932 \sin G + 0{,}044\,021 \sin G_1 - 0{,}015\,561 \sin G_2 - 0{,}000\,020 \sin G_3 \\
&\quad + 0{,}000\,012 \sin G_4 - 0{,}000\,001 \sin G_5 - 0{,}000\,001 \sin G_6, \\
l^{\text{IV}} &= 0{,}001\,932 \cos G + 0{,}044\,021 \cos G_1 - 0{,}015\,561 \cos G_2 - 0{,}000\,020 \cos G_3 \\
&\quad + 0{,}000\,012 \cos G_4 - 0{,}000\,001 \cos G_5 - 0{,}000\,001 \cos G_6;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
h^{\text{V}} &= 0{,}001\,863 \sin G + 0{,}034\,725 \sin G_1 + 0{,}048\,282 \sin G_2 - 0{,}000\,018 \sin G_3 \\
&\quad + 0{,}000\,013 \sin G_4 - 0{,}000\,008 \sin G_5 - 0{,}000\,010 \sin G_6, \\
l^{\text{V}} &= 0{,}001\,863 \cos G + 0{,}034\,725 \cos G_1 + 0{,}048\,282 \cos G_2 - 0{,}000\,018 \cos G_3 \\
&\quad + 0{,}000\,013 \cos G_4 - 0{,}000\,008 \cos G_5 - 0{,}000\,010 \cos G_6;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
h^{\text{VI}} &= 0{,}032\,030 \sin G - 0{,}030\,861 \sin G_1 - 0{,}001\,764 \sin G_2 + 0{,}000\,007 \sin G_3 \\
&\quad - 0{,}000\,003 \sin G_4 + 0{,}000\,000 \sin G_5 + 0{,}000\,001 \sin G_6, \\
l^{\text{VI}} &= 0{,}032\,030 \cos G - 0{,}030\,861 \cos G_1 - 0{,}001\,764 \cos G_2 + 0{,}000\,007 \cos G_3 \\
&\quad - 0{,}000\,003 \cos G_4 + 0{,}000\,000 \cos G_5 + 0{,}000\,001 \cos G_6.
\end{aligned}\right.$$

Nous espérons qu'aucune erreur de quelque importance ne se sera glissée dans ces formules; et l'on s'en convaincra comme nous, si l'on veut les soumettre aux vérifications suivantes.

Chacun des arguments g, g_1, g_2... a été déterminé séparément, par des calculs distincts; et comme on connaît *à priori* la somme de ces

arguments, il en résulte une vérification qui embrasse aussi la détermination des rapports des coefficients.

Si dans les expressions de h, l, h', l',... on fait $t=0$, on doit retrouver les valeurs qu'affectent ces quantités à l'origine du temps. Or on peut reconnaître que ces conditions, qui sont au nombre de quatorze, vérifient tous les calculs. Considérons les intégrales générales (5) qui renferment encore quatorze indéterminées, après qu'on a calculé les rapports des coefficients entre eux. Nous avons vu qu'on ne résolvait pas directement ces quatorze équations, après y avoir supposé le temps nul; mais que chaque inconnue était obtenue par une élimination qui repose sur les relations qui existent entre les différentes quantités $\left(\frac{N}{N^{\mathrm{vi}}}, \frac{N'}{N^{\mathrm{vi}}}, \ldots\ldots\right)$, $\left(\frac{N_1}{N_1^{\mathrm{vi}}}, \frac{N'_1}{N_1^{\mathrm{vi}}}, \ldots\ldots\right)$,...... prises dans deux systèmes différents des solutions. Si donc un seul de ces rapports $\frac{N}{N^{\mathrm{vi}}}$, $\frac{N'}{N^{\mathrm{vi}}}$... était inexact, les relations dont il est question cesseraient d'avoir lieu; la méthode d'élimination employée serait fautive, et les formules ne reproduiraient plus les excentricités et les positions des périhélies telles qu'elles ont lieu à l'origine du temps; ou ce qui revient au même, les quantités h_0, l_0, h'_0, l'_0,... qui en dépendent.

13. On démontre (*Mécanique céleste*, livre II, § 56) que l'excentricité d'une planète ne pourra jamais dépasser la somme des valeurs absolues des coefficients N, N_1, N_2,... qui entrent dans les expressions de h et de l relatives à cette planète. Il en résulte, pour les excentricités, des limites qu'on trouvera réunies dans le tableau suivant, avec les variations qu'elles subiraient par l'effet de petits changements apportés aux masses des planètes.

	LIMITES des excentricités	VARIATIONS QUE PRODUIRAIENT DANS CES LIMITES LES VARIATIONS DES MASSES
MERCURE..	0,225 646	$-0,005\,37\,\mu + 0,009\,41\,\mu' + 0,006\,78\,\mu'' + 0,000\,71\,\mu''' - 0,035\,39\,\mu^{\mathrm{iv}} + 0,019\,78\,\mu^{\mathrm{v}} + 0,004\,11\,\mu^{\mathrm{vi}}$
VÉNUS.....	0,086 716	$0,024\,69\,\mu + 0,108\,20\,\mu' + 0,071\,82\,\mu'' + 0,018\,84\,\mu''' - 0,238\,91\,\mu^{\mathrm{iv}} + 0,013\,43\,\mu^{\mathrm{v}} + 0,001\,94\,\mu^{\mathrm{vi}}$
LA TERRE.	0,077 747	$0,017\,59\,\mu + 0,112\,97\,\mu' + 0,031\,99\,\mu'' + 0,018\,48\,\mu''' - 0,195\,14\,\mu^{\mathrm{iv}} + 0,012\,59\,\mu^{\mathrm{v}} + 0,001\,54\,\mu^{\mathrm{vi}}$
MARS.....	0,142 243	$0,003\,38\,\mu + 0,014\,52\,\mu' + 0,017\,20\,\mu'' + 0,003\,14\,\mu''' - 0,052\,08\,\mu^{\mathrm{iv}} + 0,015\,56\,\mu^{\mathrm{v}} - 0,001\,70\,\mu^{\mathrm{vi}}$
JUPITER....	0,061 548	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' - 0,000\,01\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' - 0,013\,06\,\mu^{\mathrm{iv}} + 0,010\,97\,\mu^{\mathrm{v}} + 0,002\,09\,\mu^{\mathrm{vi}}$
SATURNE...	0,084 919	$0,000\,00\,\mu \quad 0,000\,00\,\mu' + 0,000\,01\,\mu'' \quad 0,000\,00\,\mu''' + 0,005\,88\,\mu^{\mathrm{iv}} - 0,007\,08\,\mu^{\mathrm{v}} + 0,001\,19\,\mu^{\mathrm{vi}}$
URANUS ...	0,064 666	$0,000\,00\,\mu - 0,000\,11\,\mu' - 0,000\,16\,\mu'' - 0,000\,06\,\mu''' + 0,001\,55\,\mu^{\mathrm{iv}} + 0,003\,92\,\mu^{\mathrm{v}} - 0,005\,15\,\mu^{\mathrm{vi}}$

Nous ferons simplement remarquer que les coefficients des premières puissances des erreurs des masses, dans les expressions des variations des limites des excentricités de Jupiter, Saturne et Uranus sont de beaucoup plus petits que les valeurs absolues des limites elles-mêmes. *Ces limites sont donc connues avec une grande exactitude.* Cette conséquence est analogue à celle que nous avons déduite d'un calcul direct (page 103 de ce volume), relativement aux inclinaisons des orbites des mêmes planètes.

14. On peut, au moyen des formules du § **12**, déterminer quel sera l'état du système à une époque donnée; il suffira d'attribuer au temps la valeur qu'on lui suppose. Mais on doit observer que l'inexactitude des arguments g, g_1,... est cause que les angles G, G_1,... sont affectés d'erreurs qui croissent proportionnellement au temps; de sorte qu'après quelques périodes de ces angles, on ne connaît plus du tout leurs grandeurs relatives. Les formules qui donnent les valeurs de h, l,... ne peuvent donc servir que pendant un certain temps, limité par l'inexactitude des masses admises.

Lorsqu'on se propose toutefois de prévoir si une partie des éléments du système pourront prendre entre eux une position donnée, il est possible, dans la détermination des valeurs correspondantes des autres éléments, de se débarrasser de la considération du temps. Nous n'en donnerons ici qu'un exemple, en nous proposant de chercher si rien ne s'oppose à ce que tous les périhélies aient coïncidé autrefois, ou à ce qu'ils coïncident dans l'avenir.

Si dans l'équation (13) nous mettons pour $h, l, h', l',\ldots$ leurs valeurs $e\sin\varpi$, $e\cos\varpi$, $e'\sin\varpi'$, $e'\cos\varpi'$,... puis que nous supposions $\varpi = \varpi' = \varpi''$,... ces angles disparaîtront du premier membre qui deviendra un carré parfait; et en extrayant sa racine carrée, et considérant les sept planètes simultanément, on trouvera

$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}e + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'e' + m''\sqrt{a''}\,\mathrm{N}''e'' + m'''\sqrt{a'''}\,\mathrm{N}'''e''' + \ldots + m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}e^{\mathrm{vi}} = \text{constante}.$$

D'autre part, reportons-nous (§ **3**) à la formule qui détermine N^{vi}; il sera facile d'apercevoir que la constante qui se trouve ici dans le second membre a pour valeur

$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}^2 + m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'^2 + \ldots\ldots + m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}\,2}.$$

Substituons cette valeur dans la relation précédente, passons tous les termes dans le premier membre; formons enfin les équations analogues que donnent les sept systèmes de solutions, et nous obtiendrons les sept conditions

$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}(e-\mathrm{N})+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'(e'-\mathrm{N}')+\ldots+m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}(e^{\mathrm{vi}}-\mathrm{N}^{\mathrm{vi}})=0,$$
$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}_1(e-\mathrm{N}_1)+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'_1(e'-\mathrm{N}'_1)+\ldots+m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_1(e^{\mathrm{vi}}-\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_1)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m\sqrt{a}\,\mathrm{N}_6(e-\mathrm{N}_6)+m'\sqrt{a'}\,\mathrm{N}'_6(e'-\mathrm{N}'_6)+\ldots+m^{\mathrm{vi}}\sqrt{a^{\mathrm{vi}}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_6(e^{\mathrm{vi}}-\mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_6)=0.$$

De ces équations on déduit les valeurs suivantes des excentricités

$$\begin{aligned} e &= \mathrm{N} + \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 + \ldots\ldots + \mathrm{N}_6,\\ e' &= \mathrm{N}' + \mathrm{N}'_1 + \mathrm{N}'_2 + \ldots\ldots + \mathrm{N}'_6,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e^{\mathrm{vi}} &= \mathrm{N}^{\mathrm{vi}} + \mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_1 + \mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_2 + \ldots\ldots + \mathrm{N}^{\mathrm{vi}}_6, \end{aligned}$$

on s'en convaincra aisément par la substitution; les résultats seront nuls, en vertu des relations (6).

Ainsi, en admettant que tous les périhélies viennent à coïncider, on pourra déterminer, sans calcul, les valeurs correspondantes des excentricités. On doit toutefois remarquer que rien n'indique encore quels sont les signes qu'on doit attribuer aux coefficients N, N_1, N_2,... puisque ces signes changent dans les formules (5) quand on augmente les angles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$,... de 180°; et ainsi l'on pourrait penser qu'il y aura beaucoup de solutions à la question. Pour lever cette difficulté, considérons qu'en déterminant à l'époque de la coïncidence des périhélies les angles $\mathcal{C}$ par la formule (8*), tous ces angles sont égaux et ont même sinus, de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} h &= (\mathrm{N} + \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 + \ldots\ldots + \mathrm{N}_6)\sin\mathcal{C},\\ h' &= (\mathrm{N}' + \mathrm{N}'_1 + \mathrm{N}'_2 + \ldots\ldots + \mathrm{N}'_6)\sin\mathcal{C},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Remarquons en outre que pour que ce soient réellement les extrémités périhélies des grands axes qui coïncident, il est indispensable que h, h', h'',... soient de même signe; et nous reconnaîtrons que nous ne devrons adopter pour N, N_1, N_2,... que les combinaisons de signes qui conduiront à des valeurs de même signe pour toutes les sommes

$$(\mathrm{N}+\mathrm{N}_1+\ldots\ldots+\mathrm{N}_6),\quad (\mathrm{N}'+\mathrm{N}'_1+\ldots\ldots+\mathrm{N}'_6)\ldots\ldots$$

Les valeurs négatives de ces sommes ne donneraient pas d'ailleurs des résultats différents de ceux que fournissent les valeurs positives qu'il suffira de considérer.

Si donc on venait à reconnaître qu'il est impossible de satisfaire à ces conditions, on pourrait prononcer avec certitude que les périhélies, tels qu'ils sont donnés par la première approximation des inégalités séculaires n'ont jamais coïncidé et ne coïncideront jamais. Cette impossibilité n'existe pas dans notre système planétaire, et l'on trouve que la coïncidence de tous les périhélies venant à s'établir, les excentricités ne pourront affecter que trois états différents.

En particulier, le retour des périhélies de Jupiter, Saturne et Uranus à une position commune dans le ciel, ramène toujours les mêmes excentricités de leurs orbites, savoir

$$e^{\text{IV}} = 0{,}030,\quad e^{\text{V}} = 0{,}085 \text{ et } e^{\text{VI}} = 0{,}000.$$

Il en résulte que *si les formules de la première approximation donnaient réellement le mouvement complet des éléments des orbites*, il suffirait de chercher l'intervalle qui sépare deux coïncidences consécutives des périhélies pour connaître la période dans laquelle les excentricités et les positions relatives des périhélies de Jupiter, Saturne et Uranus effectueraient une révolution complète. On trouverait, par des calculs assez compliqués d'analyse indéterminée, que cette période est de 900 000 ans, et que l'incertitude des valeurs des masses permet de compter sur elle à 4000 ans près.

15. La détermination des *maxima* et des *minima* des excentricités, et celle des époques correspondantes, sont impossibles d'une manière générale. Mais lorsqu'on connaît l'époque approximativement, il suffit de développer les cosinus et les sinus des formules du § **12** proportionnellement aux puissances du temps pour arriver sous forme algébrique à une solution rigoureuse du problème.

J'ai trouvé ainsi que l'excentricité de la Terre décroîtra encore pendant 23 980 ans; qu'elle atteindra alors son minimum égal à 0,003 314, et que l'incertitude qui règne sur les valeurs des masses ne permet de répondre que du chiffre 3 des millièmes. On peut consulter (*Pl. I*) une représentation géométrique de la marche de l'excentricité de la Terre

pendant trois cent dix mille ans. L'unité de l'abscisse équivaut à 10 000 années, comptées à partir du 1er janvier 1800. L'unité de l'ordonnée équivaut à 0,001, et c'est cette ordonnée qui représente la grandeur de l'excentricité.

Je terminerai ce qui a rapport aux excentricités en faisant remarquer que le terme le plus grand qui entre dans l'expression de l'excentricité de Mars a pour argument $0'',7106$. Il varie avec une lenteur excessive, et il en résulte que les retours des *maxima* les plus prononcés de l'excentricité de cette planète, seraient séparés par un intervalle de plus de dix-huit cent mille ans.

Variations séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds.

16. Désignons par φ l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur le plan de l'écliptique de 1800, et par θ la longitude de son nœud ascendant; et posons

$$p = \tang\varphi \sin\theta,$$
$$q = \tang\varphi \cos\theta;$$

lorsque p et q seront connus, on calculera φ et θ par les formules

$$\tang\varphi = \sqrt{p^2 + q^2},$$
$$\tang\theta = \frac{p}{q}.$$

Désignons d'ailleurs par les mêmes lettres, affectées de un, de deux, de trois, de quatre, de cinq et de six indices, les mêmes quantités pour Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus;

Les variations de $p, q, p', q', \ldots$ ne dépendront que des coefficients $(0,1), (1,0), (0,2), (2,0), \ldots$ déjà employés (§ 2). On détermine ces variations au moyen des équations différentielles linéaires suivantes (*Mécanique céleste*, livre II, § 59):

$$\frac{dp}{dt} = -[(0,1) + (0,2) + \ldots]q + (0,1)q' + \ldots,$$
$$\frac{dq}{dt} = [(0,1) + (0,2) + \ldots]p - (0,1)p' - \ldots,$$
$$\frac{dp'}{dt} = -[(1,0) + (1,2) + \ldots]q' + (1,0)q + \ldots,$$
$$\frac{dq'}{dt} = [(1,0) + (1,2) + \ldots]p' - (1,0)p - \ldots,$$
etc.

Ces équations s'intégreront comme celles du § **2**, et l'on obtiendra

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{M}\sin(kt+\gamma) + \mathrm{M}_1\sin(k_1t+\gamma_1) + \ldots, \\ q &= \mathrm{M}\cos(kt+\gamma) + \mathrm{M}_1\cos(k_1t+\gamma_1) + \ldots, \\ p' &= \mathrm{M}'\sin(kt+\gamma) + \mathrm{M}'_1\sin(k_1t+\gamma_1) + \ldots, \\ q' &= \mathrm{M}'\cos(kt+\gamma) + \mathrm{M}'_1\cos(k_1t+\gamma_1) + \ldots, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Les coefficients qui entrent dans ces équations se détermineront comme pour le système des excentricités et des périhélies, ce qui nous dispense d'y revenir.

L'équation en k aura une de ses racines nulles; car on satisfait aux équations différentielles en y supposant $p, p', p''\ldots$ égaux et constants, ainsi que $q, q', q''\ldots$ Il doit donc y avoir un système de valeurs M, M', M'',... toutes égales entre elles et correspondant à une racine nulle.

Les équations différentielles fournissent les sept intégrales suivantes, indépendantes du temps :

$$\left.\begin{aligned} &(m\sqrt{a}\mathrm{M}p + m'\sqrt{a'}\mathrm{M}'p' + \ldots)^2 + (m\sqrt{a}\mathrm{M}q + m'\sqrt{a'}\mathrm{M}'q' + \ldots)^2 = \text{constante}, \\ &(m\sqrt{a}\mathrm{M}_1p + m'\sqrt{a'}\mathrm{M}'_1p' + \ldots)^2 + (m\sqrt{a}\mathrm{M}_1q + m'\sqrt{a'}\mathrm{M}'_1q' + \ldots)^2 = \text{constante}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}\right\} (15)$$

et celle de ces intégrales qui correspond à la racine $k = 0$ se décompose dans les deux autres

$$\begin{aligned} m\sqrt{a}\,p + m'\sqrt{a'}\,p' + \ldots &= \text{constante}, \\ m\sqrt{a}\,q + m'\sqrt{a'}\,q' + \ldots &= \text{constante}, \end{aligned}$$

qu'on peut déduire immédiatement des équations différentielles.

Enfin on déduirait des équations différentielles, ou des équations (15) l'intégrale

$$m\sqrt{a}(p^2+q^2) + m'\sqrt{a'}(p'^2+q'^2) + \ldots = \text{constante}.$$

Cette relation sert, on le sait, à établir que les racines de l'équation en k sont toutes réelles et inégales.

17. Les tableaux qui suivent renferment les sept systèmes de solutions qui concernent les variations séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds.

Désignat. des quantités.	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS μ, μ',... DES MASSES.
		Premier Système.
k	0°	
γ	$103^{\circ}8'18''$	$-77''\mu - 135''\mu' - 28''\mu''' - 9\,325''\mu^{\text{iv}} + 13\,347''\mu^{\text{v}} - 3\,782''\mu^{\text{vi}}$
M	$0{,}027\,413$	$0{,}000\,02\,\mu' - 0{,}000\,02\,\mu'' - 0{,}002\,99\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}004\,16\,\mu^{\text{v}} - 0{,}001\,16\,\mu^{\text{vi}}$
		(On sait que M′, M″, M‴, M$^{\text{iv}}$, M$^{\text{v}}$ et M$^{\text{vi}}$ sont tous égaux à M.)
		Deuxième Système.
k_1	$-2'',502\,23$	$-0'',000\,3\,\mu' - 0'',000\,6\,\mu'' - 0'',000\,2\,\mu''' - 0'',881\,3\,\mu^{\text{iv}} - 1'',444\,1\,\mu^{\text{v}} - 0'',177\,2\,\mu^{\text{vi}}$
γ_1	$126^{\circ}22'54''$	$-507''\mu - 747''\mu' - 155''\mu'' - 180''\mu''' + 2\,508''\mu^{\text{iv}} + 211''\mu^{\text{v}} - 1135''\mu^{\text{vi}}$
M_1	$0{,}003\,890$	$0{,}000\,16\,\mu - 0{,}001\,24\,\mu' - 0{,}000\,85\,\mu'' - 0{,}000\,06\,\mu''' - 0{,}005\,27\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}003\,18\,\mu^{\text{v}} + 0{,}004\,09\,\mu^{\text{vi}}$
M'_1	$0{,}002\,527$	$0{,}000\,14\,\mu + 0{,}000\,04\,\mu' - 0{,}000\,34\,\mu'' - 0{,}000\,03\,\mu''' - 0{,}003\,51\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}001\,16\,\mu^{\text{v}} + 0{,}002\,54\,\mu^{\text{vi}}$
M''_1	$0{,}002\,287$	$0{,}000\,09\,\mu + 0{,}000\,14\,\mu' - 0{,}000\,17\,\mu'' - 0{,}000\,03\,\mu''' - 0{,}003\,18\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,88\,\mu^{\text{v}} + 0{,}002\,28\,\mu^{\text{vi}}$
M'''_1	$0{,}001\,724$	$0{,}000\,02\,\mu + 0{,}000\,05\,\mu' + 0{,}000\,04\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}002\,04\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,26\,\mu^{\text{v}} + 0{,}001\,66\,\mu^{\text{vi}}$
M^{iv}_1	$0{,}001\,373$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,01\,\mu' + 0{,}000\,01\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}001\,29\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,02\,\mu^{\text{v}} + 0{,}001\,30\,\mu^{\text{vi}}$
M^{v}_1	$0{,}001\,159$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,01\,\mu' + 0{,}000\,01\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}001\,09\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,02\,\mu^{\text{v}} + 0{,}001\,08\,\mu^{\text{vi}}$
M^{vi}_1	$-0{,}016\,429$	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,07\,\mu' - 0{,}000\,05\,\mu'' - 0{,}000\,02\,\mu''' + 0{,}003\,11\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}004\,06\,\mu^{\text{v}} + 0{,}001\,10\,\mu^{\text{vi}}$
		Troisième Système.
k_2	$-25'',887\,31$	$-0'',000\,1\,\mu - 0'',001\,5\,\mu' - 0'',003\,3\,\mu'' - 0{,}001\,1\,\mu''' - 18'',246\,9\,\mu^{\text{iv}} - 7'',316\,7\,\mu^{\text{v}} - 0'',315\,5\,\mu^{\text{vi}}$
γ_2	$126^{\circ}5'44''$	$-5''\mu + 33''\mu' + 114''\mu'' - 83''\mu''' - 57''\mu^{\text{iv}} - 81''\mu^{\text{v}} - 79''\mu^{\text{vi}}$
M_2	$0{,}000\,268$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,03\,\mu' + 0{,}000\,08\,\mu'' - 0{,}000\,01\,\mu''' - 0{,}000\,18\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,08\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M'_2	$0{,}000\,252$	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,60\,\mu' - 0{,}001\,50\,\mu'' + 0{,}000\,01\,\mu''' + 0{,}001\,19\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,89\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,03\,\mu^{\text{vi}}$
M''_2	$0{,}002\,737$	$0{,}000\,02\,\mu + 0{,}001\,23\,\mu' + 0{,}000\,57\,\mu'' - 0{,}000\,16\,\mu''' - 0{,}001\,95\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,37\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,07\,\mu^{\text{vi}}$
M'''_2	$0{,}009\,345$	$0{,}000\,02\,\mu + 0{,}000\,27\,\mu' + 0{,}001\,40\,\mu'' + 0{,}000\,03\,\mu''' - 0{,}000\,87\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,53\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,33\,\mu^{\text{vi}}$
M^{iv}_2	$-0{,}006\,316$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' + 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}004\,52\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}004\,52\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M^{v}_2	$0{,}015\,774$	$0{,}000\,00\,\mu - 0{,}000\,01\,\mu' - 0{,}000\,02\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}004\,33\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}004\,51\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,20\,\mu^{\text{vi}}$
M^{vi}_2	$-0{,}000\,681$	$0{,}000\,00\,\mu + 0{,}000\,00\,\mu' + 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}000\,32\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,27\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,04\,\mu^{\text{vi}}$
		Quatrième Système.
k_3	$-4'',795\,35$	$0'',402\,3\,\mu - 1'',335\,8\,\mu' - 0'',906\,2\,\mu'' - 0'',063\,7\,\mu''' - 2'',754\,1\,\mu^{\text{iv}} - 0'',130\,1\,\mu^{\text{v}} - 0'',005\,1\,\mu^{\text{vi}}$
γ_3	$22^{\circ}40'25''$	$8944''\mu - 30\,968''\mu' - 56\,244''\mu'' + 1\,617''\mu''' + 112\,298''\mu^{\text{iv}} - 28\,446''\mu^{\text{v}} - 7\,203''\mu^{\text{vi}}$
M_3	$0{,}103\,470$	$-0{,}016\,80\,\mu - 0{,}050\,46\,\mu' - 0{,}013\,44\,\mu'' + 0{,}002\,95\,\mu''' + 0{,}070\,00\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}006\,77\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,98\,\mu^{\text{vi}}$
M'_3	$0{,}030\,920$	$0{,}008\,16\,\mu + 0{,}016\,59\,\mu' - 0{,}007\,34\,\mu'' - 0{,}000\,38\,\mu''' - 0{,}017\,12\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,07\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,16\,\mu^{\text{vi}}$
M''_3	$0{,}014\,621$	$0{,}005\,37\,\mu + 0{,}016\,22\,\mu' - 0{,}003\,18\,\mu'' - 0{,}000\,51\,\mu''' - 0{,}017\,69\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,31\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,11\,\mu^{\text{vi}}$
M'''_3	$0{,}002\,954$	$0{,}001\,08\,\mu + 0{,}003\,74\,\mu' + 0{,}001\,08\,\mu'' - 0{,}000\,07\,\mu''' - 0{,}005\,70\,\mu^{\text{iv}} - 0{,}000\,15\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,02\,\mu^{\text{vi}}$
M^{iv}_3	$-0{,}000\,040$	$-0{,}000\,01\,\mu - 0{,}000\,04\,\mu' - 0{,}000\,00\,\mu'' + 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}000\,06\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,01\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M^{v}_3	$-0{,}000\,050$	$-0{,}000\,02\,\mu - 0{,}000\,05\,\mu' - 0{,}000\,01\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' + 0{,}000\,07\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,01\,\mu^{\text{v}} - 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$
M^{vi}_3	$0{,}000\,042$	$0{,}000\,03\,\mu + 0{,}000\,02\,\mu' - 0{,}000\,01\,\mu'' - 0{,}000\,00\,\mu''' - 0{,}000\,06\,\mu^{\text{iv}} + 0{,}000\,02\,\mu^{\text{v}} + 0{,}000\,00\,\mu^{\text{vi}}$

…si- …nat. …es …an- …ées.	VALEURS numériques pour les masses admises.	VARIATIONS EN FONCTIONS DES VARIATIONS $\mu, \mu', \ldots$ DES MASSES.
		Cinquième Système.
[illegible]	$-7'',067\ 95$	$-0'',668\ 8\ \mu - 0'',938\ 7\ \mu' - 0'',734\ 0\ \mu'' - 0'',116\ 9\ \mu''' - 4'',394\ 2\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0'',205\ 2\ \mu^{\mathrm{v}} - 0'',004\ 9\ \mu^{\mathrm{vi}}$
[illegible]	$-87^{\circ}\ 51'44''$	$-145\ 668''\ \mu - 337\ 824''\ \mu' - 6\ 963''\ \mu'' + 23\ 462''\ \mu''' + 396\ 915''\ \mu^{\mathrm{iv}} + 64\ 214''\ \mu^{\mathrm{v}} + 5\ 866''\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$_4$	$-0,023\ 222$	$0,000\ 06\ \mu - 0,026\ 49\ \mu' - 0,030\ 24\ \mu'' + 0,001\ 51\ \mu''' + 0,060\ 93\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0,004\ 96\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 81\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$'_4$	$0,009\ 871$	$0,004\ 07\ \mu - 0,009\ 42\ \mu' + 0,009\ 63\ \mu'' - 0,000\ 06\ \mu''' - 0,007\ 53\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,002\ 95\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 36\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$''_4$	$0,008\ 323$	$0,003\ 99\ \mu - 0,006\ 11\ \mu' + 0,009\ 08\ \mu'' - 0,000\ 19\ \mu''' - 0,009\ 42\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,002\ 35\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 30\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$'''_4$	$0,001\ 816$	$0,000\ 93\ \mu - 0,001\ 00\ \mu' + 0,003\ 14\ \mu'' - 0,000\ 01\ \mu''' - 0,003\ 58\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 45\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 07\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$^{\mathrm{iv}}_4$	$-0,000\ 011$	$-0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 01\ \mu' - 0,000\ 02\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' + 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$^{\mathrm{v}}_4$	$-0,000\ 017$	$-0,000\ 01\ \mu + 0,000\ 01\ \mu' - 0,000\ 03\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' + 0,000\ 02\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
$^{\mathrm{vi}}_4$	$0,000\ 007$	$0,000\ 00\ \mu - 0,000\ 01\ \mu' + 0,000\ 01\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' - 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
		Sixième Système.
[illegible]$_5$	$-17'',468\ 10$	$-0'',069\ 8\ \mu - 1'',243\ 5\ \mu' - 2'',449\ 7\ \mu'' + 0'',080\ 8\ \mu''' - 13'',201\ 1\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0'',570\ 8\ \mu^{\mathrm{v}} - 0'',013\ 4\ \mu^{\mathrm{vi}}$
[illegible]$_5$	$-63^{\circ}\ 11'36''$	$27\ 985''\ \mu + 371\ 353''\ \mu' + 285\ 642''\ \mu'' + 24\ 886''\ \mu''' - 683\ 539''\ \mu^{\mathrm{iv}} - 25\ 585''\ \mu^{\mathrm{v}} - 744''\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M_5	$0,001\ 306$	$-0,000\ 35\ \mu - 0,006\ 15\ \mu' - 0,004\ 95\ \mu'' + 0,000\ 67\ \mu''' + 0,010\ 27\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 51\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M'_5	$-0,007\ 471$	$0,002\ 13\ \mu + 0,044\ 44\ \mu' + 0,028\ 38\ \mu'' - 0,003\ 75\ \mu''' - 0,067\ 88\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0,003\ 28\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 04\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M''_5	$0,005\ 356$	$-0,002\ 17\ \mu - 0,034\ 06\ \mu' - 0,032\ 60\ \mu'' + 0,002\ 30\ \mu''' + 0,063\ 53\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,002\ 96\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 04\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M'''_5	$0,048\ 471$	$-0,003\ 94\ \mu - 0,054\ 96\ \mu' - 0,043\ 24\ \mu'' - 0,011\ 49\ \mu''' + 0,106\ 02\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,007\ 66\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 05\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M^{iv}_5	$-0,000\ 002$	$0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 01\ \mu' + 0,000\ 01\ \mu'' - 0,000\ 00\ \mu''' - 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M^{v}_5	$-0,000\ 020$	$0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 04\ \mu' + 0,000\ 03\ \mu'' - 0,000\ 01\ \mu''' - 0,000\ 07\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M^{vi}_5	$0,000\ 002$	$-0,000\ 00\ \mu - 0,000\ 00\ \mu' - 0,000\ 00\ \mu'' + 0,000\ 00\ \mu''' + 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
		Septième Système.
[illegible]	$-18'',567\ 87$	$-0'',235\ 1\ \mu - 5'',035\ 4\ \mu' - 5'',478\ 9\ \mu'' - 0'',328\ 5\ \mu''' - 7'',157\ 5\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0'',324\ 7\ \mu^{\mathrm{v}} - 0'',007\ 6\ \mu^{\mathrm{vi}}$
[illegible]$_6$	$73^{\circ}\ 13'49''$	$11\ 670''\ \mu + 154\ 038''\ \mu' + 122\ 634''\ \mu'' - 21\ 817''\ \mu''' - 256\ 131''\ \mu^{\mathrm{iv}} - 10\ 133''\ \mu^{\mathrm{v}} - 260''\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M_6	$-0,003\ 859$	$-0,000\ 28\ \mu - 0,007\ 85\ \mu' - 0,006\ 19\ \mu'' + 0,000\ 49\ \mu''' + 0,013\ 29\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,000\ 55\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M'_6	$0,024\ 440$	$0,001\ 87\ \mu + 0,027\ 87\ \mu' + 0,046\ 73\ \mu'' - 0,002\ 34\ \mu''' - 0,071\ 17\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0,002\ 88\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 07\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M''_6	$-0,024\ 320$	$-0,000\ 71\ \mu - 0,043\ 36\ \mu' - 0,015\ 22\ \mu'' + 0,001\ 15\ \mu''' + 0,055\ 84\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,002\ 24\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 05\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M'''_6	$0,033\ 763$	$-0,007\ 00\ \mu - 0,102\ 85\ \mu' - 0,075\ 77\ \mu'' - 0,012\ 41\ \mu''' + 0,190\ 11\ \mu^{\mathrm{iv}} + 0,007\ 75\ \mu^{\mathrm{v}} + 0,000\ 16\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M^{iv}_6	$0,000\ 000$	$0,000\ 00\ \mu \quad 0,000\ 00\ \mu' \quad 0,000\ 00\ \mu'' \quad 0,000\ 00\ \mu''' \quad 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{iv}} \quad 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{v}} \quad 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M^{v}_6	$0,000\ 002$	$0,000\ 00\ \mu + 0,000\ 06\ \mu' + 0,000\ 05\ \mu'' - 0,000\ 01\ \mu''' - 0,000\ 10\ \mu^{\mathrm{iv}} - 0,000\ 01\ \mu^{\mathrm{v}} - 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$
M^{vi}_6	$-0,000\ 000$	$0,000\ 00\ \mu \quad 0,000\ 00\ \mu' \quad 0,000\ 00\ \mu'' \quad 0,000\ 00\ \mu''' \quad 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{iv}} \quad 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{v}} \quad 0,000\ 00\ \mu^{\mathrm{vi}}$

18. On peut s'assurer que les nombres inscrits dans les tableaux qui précèdent satisfont parfaitement aux conditions que nous avons indiquées en traitant des excentricités. En les rapprochant convenablement, on formera pour chaque planète les valeurs suivantes de p, q, p', q'..., dans lesquelles nous avons posé, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
K &= 103^{\circ}\ 8'\ 18'',\\
K_1 &= 126^{\circ}22'\ 54'' - 2'',502\ 23\,t,\\
K_2 &= 126.\ 5.44 - 25,887\ 31\,t,\\
K_3 &= 22.40.25 - 4,795\ 35\,t,\\
K_4 &= -\ 87.51.44 - 7,067\ 95\,t,\\
K_5 &= -\ 63.11.36 - 17,468\ 10\,t,\\
\text{et}\ K_6 &= 73.13.49 - 18,567\ 87\,t:
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
p &= 0,027\,413 \sin K + 0,003\,890 \sin K_1 + 0,000\,268 \sin K_2 + 0,103\,470 \sin K_3\\
&\quad - 0,023\,222 \sin K_4 + 0,001\,306 \sin K_5 - 0,003\,859 \sin K_6\\
q &= 0,027\,413 \cos K + 0,003\,890 \cos K_1 + 0,000\,268 \cos K_2 + 0,103\,470 \cos K_3\\
&\quad - 0,023\,222 \cos K_4 + 0,001\,306 \cos K_5 - 0,003\,859 \cos K_6\,.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
p' &= 0,027\,413 \sin K + 0,002\,527 \sin K_1 + 0,000\,252 \sin K_2 + 0,020\,920 \sin K_3\\
&\quad + 0,009\,871 \sin K_4 - 0,007\,471 \sin K_5 + 0,024\,440 \sin K_6\,.\\
q' &= 0,027\,413 \cos K + 0,002\,527 \cos K_1 + 0,000\,252 \cos K_2 + 0,020\,920 \cos K_3\\
&\quad + 0,009\,871 \cos K_4 - 0,007\,471 \cos K_5 + 0,024\,440 \cos K_6\,.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
p'' &= 0,027\,413 \sin K + 0,002\,287 \sin K_1 + 0,002\,737 \sin K_2 + 0,014\,621 \sin K_3\\
&\quad + 0,008\,323 \sin K_4 + 0,005\,356 \sin K_5 - 0,024\,320 \sin K_6\,.\\
q'' &= 0,027\,413 \cos K + 0,002\,287 \cos K_1 + 0,002\,737 \cos K_2 + 0,014\,621 \cos K_3\\
&\quad + 0,008\,323 \cos K_4 + 0,005\,356 \cos K_5 - 0,024\,320 \cos K_6\,:
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
p''' &= 0,027\,413 \sin K + 0,001\,724 \sin K_1 + 0,009\,345 \sin K_2 + 0,002\,954 \sin K_3\\
&\quad + 0,001\,816 \sin K_4 + 0,048\,471 \sin K_5 + 0,033\,763 \sin K_6\,.\\
q''' &= 0,027\,413 \cos K + 0,001\,724 \cos K_1 + 0,009\,345 \cos K_2 + 0,002\,954 \cos K_3\\
&\quad + 0,001\,816 \cos K_4 + 0,048\,471 \cos K_5 + 0,033\,763 \cos K_6\,.
\end{aligned}
\right.
$$

$$\left\{\begin{aligned} p^{\text{iv}} &= 0{,}027\,413 \sin K + 0{,}001\,373 \sin K_1 - 0{,}006\,316 \sin K_2 - 0{,}000\,040 \sin K_3 \\ &\quad - 0{,}000\,011 \sin K_4 - 0{,}000\,002 \sin K_5 + 0{,}000\,000 \sin K_6 . \\ q^{\text{iv}} &= 0{,}027\,413 \cos K + 0{,}001\,373 \cos K_1 - 0{,}006\,316 \cos K_2 - 0{,}000\,040 \cos K_3 \\ &\quad - 0{,}000\,011 \cos K_4 - 0{,}000\,002 \cos K_5 + 0{,}000\,000 \cos K_6 : \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} p^{\text{v}} &= 0{,}027\,413 \sin K + 0{,}001\,159 \sin K_1 + 0{,}015\,774 \sin K_2 - 0{,}000\,050 \sin K_3 \\ &\quad - 0{,}000\,017 \sin K_4 - 0{,}000\,020 \sin K_5 + 0{,}000\,002 \sin K_6 . \\ q^{\text{v}} &= 0{,}027\,413 \cos K + 0{,}001\,159 \cos K_1 + 0{,}015\,774 \cos K_2 - 0{,}000\,050 \cos K_3 \\ &\quad - 0{,}000\,017 \cos K_4 - 0{,}000\,020 \cos K_5 + 0{,}000\,002 \cos K_6 : \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} p^{\text{vi}} &= 0{,}027\,413 \sin K - 0{,}016\,429 \sin K_1 - 0{,}000\,681 \sin K_2 + 0{,}000\,042 \sin K_3 \\ &\quad + 0{,}000\,007 \sin K_4 + 0{,}000\,002 \sin K_5 - 0{,}000\,000 \sin K_6 . \\ q^{\text{vi}} &= 0{,}027\,413 \cos K - 0{,}016\,429 \cos K_1 - 0{,}000\,681 \cos K_2 + 0{,}000\,042 \cos K_3 \\ &\quad + 0{,}000\,007 \cos K_4 + 0{,}000\,002 \cos K_5 - 0{,}000\,000 \cos K_6 . \end{aligned}\right.$$

En supposant le temps nul dans ces formules, elles redonnent les inclinaisons et les longitudes des nœuds, à l'origine du temps, avec une parfaite exactitude.

19. Les mêmes considérations qui fournissent (§ **13**) des limites supérieures des excentricités, donnent ici des limites supérieures des tangentes des inclinaisons sur l'écliptique de 1800. Voici les angles correspondants à ces limites, ainsi que les variations qu'ils subiraient par l'effet de petits changements apportés aux masses des planètes.

	LIMITES des inclinaisons sur l'écliptique de 1800.	VARIATIONS QUE PRODUIRAIENT DANS CES LIMITES LES VARIATIONS DES MASSES
MERCURE..	9°16′54″	$-3\,368''\mu - 4\,713''\mu' + 3\,466''\mu'' + 311''\mu''' - 480''\mu^{\text{iv}} + 3\,839''\mu^{\text{v}} + 945''\mu^{\text{vi}}$
VENUS....	5.18.30	$2\,473''\mu - 2\,032''\mu' + 3\,840''\mu'' + 192''\mu''' - 6\,802''\mu^{\text{iv}} + 1\,939''\mu^{\text{v}} + 391''\mu^{\text{vi}}$
LA TERRE.	4.51.42	$1\,640''\mu + 4\,257''\mu' - 2\,276''\mu'' + 53''\mu''' - 5\,641''\mu^{\text{iv}} + 1\,673''\mu^{\text{v}} + 296''\mu^{\text{vi}}$
MARS. ...	7. 9.10	$-1\,804''\mu - 31\,418''\mu' - 23\,021''\mu'' - 4\,863''\mu''' + 57\,051''\mu^{\text{iv}} + 3\,982''\mu^{\text{v}} + 73''\mu^{\text{vi}}$
JUPITER. .	2. 0.48	$1''\mu + 5''\mu' - 4''\mu'' + 0''\mu''' - 1\,815''\mu^{\text{iv}} + 1\,785''\mu^{\text{v}} + 28''\mu^{\text{vi}}$
SATURNE..	2.32.39	$1''\mu + 4''\mu' - 6''\mu'' + 0''\mu''' + 53''\mu^{\text{iv}} - 76''\mu^{\text{v}} + 25''\mu^{\text{vi}}$
URANUS ..	2.33. 8	$3''\mu + 18''\mu' + 6''\mu'' + 5''\mu''' - 1\,321''\mu^{\text{iv}} + 1\,749''\mu^{\text{v}} - 459''\mu^{\text{vi}}$

Nous ferons remarquer que les limites des inclinaisons de Jupiter, Saturne et Uranus sont déterminées avec une très grande exactitude, et qu'elles ne varieraient que très peu par de faibles changements dans les masses. Ce résultat s'accorde avec celui que nous avons obtenu directement, page 103 de ce volume.

20. Pour avoir les limites les plus étroites des inclinaisons *relatives* Φ des orbites, il faut remarquer qu'à cause de la petitesse des inclinaisons on peut calculer Φ à une époque quelconque au moyen de la formule

$$\tang \Phi = \sqrt{(p'-p)^2 + (q'-q)^2}.$$

La comparaison de cette expression avec celle de tang φ (§ **16**) montre que pour obtenir toutes les circonstances des mouvements des inclinaisons des orbites rapportées à l'une d'elles, il suffit de substituer aux expressions $p, q, p', q', \ldots\ldots$ du § **18**, leurs différences avec les valeurs qu'affectent ces quantités pour l'orbite prise pour terme de comparaison. Les limites des inclinaisons relatives s'obtiennent ainsi comme les limites des inclinaisons absolues.

On trouvera ces limites réunies dans le tableau suivant que nous avons disposé à l'imitation de la table de Pythagore :

	URANUS.	SATURNE.	JUPITER.	MARS.	LA TERRE.	VÉNUS.
MERCURE...............	8°42′ 13″	8°32′ 21″	8° 1′ 30″	12°29′ 38″	8° 28′ 24″	8°45′ 37″
VÉNUS................	4.43. 7	4.33.12	4. 1.52	5.46.40	4. 7.38	
LA TERRE.............	4.16.20	3.49.33	3.35. 3	7.12.44		
MARS................	6.34. 3	5.22.29	5.53. 4			
JUPITER...............	1.20.55	1.16.47				
SATURNE...............	1.57.28					

Les limites des inclinaisons relatives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus sont les mêmes que celles que nous avons obtenues directement page 102 de ce volume.

Il était nécessaire de former ces limites des inclinaisons relatives, parce qu'elles sont souvent bien plus petites que celles qu'on obtiendrait en prenant les sommes des limites des inclinaisons de deux des orbites sur le plan fixe de l'écliptique de 1800. Par exemple, la somme de ces inclinaisons, pour Vénus et la Terre, est de $10^\circ\,10'\,12''$, tandis que les plans de leurs orbites ne peuvent jamais faire entre eux un angle de plus de $4^\circ\,7'\,38''$.